

LUKUTEORIA JA RYHMÄT

Harjoitus 4, kevät 2011

1. Laske $\varphi(n)$, kun n on
a) 27, b) 252, c) 2000, d) 1776.
2. Luku 44^{49} jaetaan luvulla 105. Mikä on jakojäännös?
3. Määrää luvun 41^{82} kaksi viimeistä numeroa.
4. Tutki, onko operaatio $(*)$ binäärinen operaatio seuraavissa tapauksissa
a) $a * b = \frac{a+b}{3}$ joukossa \mathbb{Z} ,
b) $a * b = a + \frac{ab}{7}$ joukossa \mathbb{Q} .
5. Merkitään $2\mathbb{Z} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että $(2\mathbb{Z}, +)$ on ryhmä.
6. Olkoon $M = \{A | A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A \neq 0\}$. Osoita, että (M, \cdot) on ryhmä, missä (\cdot) on matriisien kertolasku. (Käytä Lineaarialgebrasta tuttuja matriisien laskusääntöjä hyväksi todistamisessa.) Onko (M, \cdot) Abelin ryhmä?
7. Määrää luvun 7^{11999} kolme viimeistä numeroa.