

Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 5, kevät 2011

1. Kirjoita ryhmän

a) $(\mathbb{Z}_7, +)$, b) (\mathbb{Z}_9^*, \cdot) , c) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$ ryhmätaulu.

Määrää lisäksi jokaiselle alkioille sen käänteisalkio.

2. Kuinka monta alkioita on ryhmässä \mathbb{Z}_{980}^* ? Totea, että $[39]$ on ryhmän \mathbb{Z}_{980}^* alkio. Määrää alkion $[39]$ käänteisalkio ko. ryhmässä.

3. Olkoot a ja x ryhmän G alkioita ja $x^2 = 1$ sekä $xax = a^3$. Osoita, että $a^8 = 1$.

4. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_8, +)$. Mitkä seuraavista ovat sen aliryhmiä?

a) $H_1 = \{[0], [2], [4], [6]\}$,

b) $H_2 = \{[0], [3], [6]\}$,

c) $H_3 = \{[0], [4]\}$.

5. Kirjoita ryhmän $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$ ryhmätaulu. Onko

$H = \{[1], [5], [11]\}$ ryhmän \mathbb{Z}_{14}^* aliryhmä? Perustele vastauksesi.

6. Olkoon G ryhmä sekä H ja K ryhmän G aliryhmiä. Osoita, että $H \cap K$ on ryhmän G aliryhmä. Onko $H \cap K$ ryhmien H ja K aliryhmä?

7. Olkoon G Abelin ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $K \leq G$. Merkitään $HK = \{ab \mid a \in H; b \in K\}$. Osoita, että $HK \leq G$.