LUKUTEORIA JA RYHMÄT

Harjoitus 7, kevät 2011

1. Olkoon G ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $N(H) = \{a \in G | aH = Ha\}$. Aikaisemmin on osoitettu, että $N(H) \leq G$. Osoita, että $H \trianglelefteq N(H)$.

2. Olkoon G ryhmä ja $M \trianglelefteq G$ sekä $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $M \cap N \trianglelefteq G$.

3. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ on aliryhmä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{20}/H$ ryhmätaulu. Miksi tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{20}/H$ on olemassa?

4. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$ on normaali syklinen aliryhmä $N = \langle [4] \rangle$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{15}^*/N$ ryhmätaulu.

5. Olkoon $G = \langle a \rangle$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä. Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G:n normaali aliryhmä. Muodosta tekijäryhmän G/K ryhmätaulu.

6. Onko tehtävän 4. ryhmällä G kertalukua kaksi olevaa normaalia aliryhmää? Jos on, niin muodosta vastaava tekijäryhmä.

7. Tarkastellaan ryhmää S_3, jonka alkioita ovat permutaatiot

   $$i = \alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$
   $$\alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \alpha_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Määrää $\langle \alpha_4 \rangle$, ja osoita, että $\langle \alpha_4 \rangle \trianglelefteq S_3$.