Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 8, kevät 2011

1. Olkoon G Abelin ryhmä ja $f : G \to G,\ f(a) = a^2$.
   Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.

2. Olkoon $G = \mathbb{Z}_7^*$ ja f kuten tehtävässä 1. Määrää $Im(f)$ ja $Ker(f)$.

3. Olkoon G ryhmä ja $f : G \to G,\ f(a) = a^{-1}$.
   Osoita, että f on ryhmähomomorfismi, jos ja vain jos G on Abelin ryhmä.

4. Olkoot $(G, \cdot)$ syklinen ryhmä, $(H, *)$ ryhmä sekä $|G| = |H|$. Ryhmät $(G, \cdot)$ ja $(H, *)$ ovat isomorfiset jos ja vain jos $(H, *)$ on syklinen ryhmä.

5. Ovatko ryhmät $(\mathbb{Z}_4, +)$ ja $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ isomorfiset?

6. Ovatko ryhmät $(\mathbb{Z}_4, +)$ ja $(\mathbb{Z}_8^*, \cdot)$ isomorfiset?

7. Kuvaus $f : (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{32}^*, \cdot), f(a) = a^2$ on ryhmähomomorfismi. Osoita, että $(\mathbb{Z}_{32}^*/Ker(f), \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

8. Olkoot $M = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A \neq 0 \right\}$

   ja $\quad N = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} |a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A = 1 \right\}$.

   Osoita, että $(N, \cdot) \trianglelefteq (M, \cdot)$ ja $(M/N, \cdot) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$ $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$.