

Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoituksia kevät 2011

1. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ja $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Määrä

a) $A + B$,

b) AB ,

c) BA ,

d) A^2 ,

e) A^T ,

f) $A^T - B$,

g) $3A$.

2. Laske seuraavat determinantit

(a) $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 6 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 & 4 \\ -5 & 2 & 8 & -5 \\ -2 & 4 & 7 & -3 \\ 2 & -3 & -5 & 8 \end{vmatrix}$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 6 & 7 \end{vmatrix}$

(f) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

Vast: a) 23, b) 21, c) 100, d) -54, e) 0, f) \cancel{A}

3. Mikäli mahdollista määritä A^{-1} , kun

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

a) Yhtälöstä $A \cdot A^{-1} = I_2$

b) Kofaktorien avulla

c) Gaussin eliminointimenetelmällä.

Tarkista kertomalla!

Vast: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Olkoon $A = \begin{pmatrix} -11 & 2 & 2 \\ -4 & 0 & 1 \\ 6 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Määritä A^{-1} mikäli mahdollista

- a) Kofaktorien avulla
- b) Gaussin eliminoimismenetelmällä

Tarkista kertomalla!

Vast: $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

5. Ratkaise yhtälöryhmä

$$\begin{cases} -11x + 2y + 2z & = 1 \\ -4x + z & = 2 \\ 6x - y - z & = 3 \end{cases}$$

- a) Käänteismatriisin avulla, mikäli mahdollista
- b) Cramerin säännöllä, mikäli mahdollista
- c) Gaussin eliminoimismenetelmällä
- d) Ilman matriiseja

Vast: $x = 7, \quad y = 9, \quad z = 30.$

6. Ratkaise lineaariset yhtälöryhmät (Gaussin eliminoimismenetelmä)

$$\begin{array}{l} \text{a) } \begin{cases} 3x + 4y - 3z & = -3 \\ 2x + 3y + 2z & = 5 \\ x + y + z & = 4 \\ 3x + 4y + 3z & = 9 \end{cases} \\ \text{b) } \begin{cases} 2x + 3y - 2z & = 5 \\ x - 2y + 3z & = 2 \\ 4x - y + 4z & = 1 \end{cases} \\ \text{c) } \begin{cases} x + 2y - z + 3w & = 3 \\ 2x + 4y + 4z + 3w & = 9 \\ 3x + 6y - z + 8w & = 10 \end{cases} \\ \text{d) } \begin{cases} 3x + 4y - 3z & = -3 \\ 2x + 3y + 2z & = 5 \\ x + y + z & = 4 \\ 2x + 2y + 2z & = 5 \end{cases} \end{array}$$

Vast:

- a) $x = 5, \quad y = -3, \quad z = 2$
- b) ei ratkaisua
- c) $z = \frac{1}{5}(6 - x - 2y), \quad w = 2z - 1, \quad x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$
- d) ei ratkaisua

7. Tutki ovatko seuraavat vektorit lineaarisesti riippumattomia

a) $x_1 = (1, 1, 2)$

$x_2 = (4, 5, 5)$

$x_3 = (5, 8, 1)$

b) $x_1 = (1, 1, 2)$

$x_2 = (4, 5, 5)$

$x_3 = (-1, -2, 2)$

Vast: a) ei b) kyllä

8. Tutki seuraavien matriisien astetta

a) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

Vast: a) 3 b) 3 c) 2

9. Etsi seuraavan matriisin ominaisarvot ja ominaisvektorit

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vast: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} x \\ -2x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-10}{3}x \\ 3x \\ x \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_3 = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

10. Määritä funktion $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$ paikalliset ääriarvokohdat ja niiden laatu. Onko kyseessä absoluuttinen ääriarvo?

Vast: $(0, 0, 0)$, abs. minimi

11. Määritä funktion $f(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 - 6z^2$ paikalliset ääriarvot ja niiden laatu.

12. Määritä funktion $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ääriarvot ehdolla $x + y + z = 35$.

Vast: (15, 9, 11), $f(15,9,11)=-362$, abs. max.

Paljonko arvioit maksimiarvon olevan jos ehtona on

$x + y + z = 36$ tai $x + y + z = 34$.

Vast: -383, -341

13. Määritä funktion $x^2 + 2y - 2x - 10z - 3$ ääriarvot ehdoilla $2x + 2y + 2z = 0$ ja $x = -2y - 3z$.

Vast: (8, -16, 8) sidottu abs. minimi.

14. a) Määritä funktion $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ääriarvot ehdolla $x + y + z \leq 35$.

b) Määritä funktion $f(x, y, z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ääriarvot ehdolla $x + y + z \geq 35$.

Vast: a) $\max(0, 0, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, b) $f(15, 9, 11) = -362$.

15. Määritä funktion $f(x, y, z) = xy + xz + yz$ ääriarvot

ehdolla $xyz \geq 125$.

Vast: Ei max, ei min.

16. Kahden teollisuudenalan 1 ja 2 taloutta kuvaa taulukko (luvut miljoonia euroja)

Tuottaja	kokonaistuotanto	käyttäjä		loppukysyntä
		1	2	
1	300	100	100	100
2	600	200	0	400

Määrää teollisuudenalojen kokonaistuotannot, kun teollisuuden 1 lopputuotekysyntä on 100 ja teollisuuden 2 lopputuotekysyntä on 200.

Vast: $\bar{x} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$.

17. Olkoon otoksen havaintoaineisto seuraava:

$$\begin{array}{ccc} y & x_1 & x_2 \\ \hline 4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{array}$$

Määrittää pienimmän neliösumman estimaatti regressioyhtälölle
 $y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2$.

Vast: $\beta_0 = 4/5$, $\beta_1 = -2/5$ ja $\beta_2 = 9/5$.

18. Etsi ääriarvot funktiolle $f(x, y) = 45x + 55y$ rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 120, \\ 3x + 10y &\leq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Huom: Käytä ratkaisumonikulmiota.

Vast: max: $f(10, 15) = 1275$
min: $f(0, 0) = 0$,

19. Maksimoi funktio $f(x, y) = 45x + 55y$ rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\leq 120, \\ 3x + 10y &\leq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Vast: $(10, 15)$ maksimiarvo 1275, $(0, 0)$ minimiarvo 0.

Huom: Käytä Kantaratkaisu -menetelmää.

20. Etsi ääriarvot funktiolle $f(x, y) = 45x + 55y$ rajoitteilla

$$\begin{aligned} 6x + 4y &\geq 120, \\ 3x + 10y &\geq 180 \text{ ja} \\ x, y &\geq 0. \end{aligned}$$

Huom: Käytä ratkaisumonikulmiota.

Vasst: min: $f(10, 15) = 1275$

21. Maksimoi funktio $f(x_1, x_2) = 2x_1 + 10x_2$ rajoitteilla

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leq 6, \\ 5x_1 + 4x_2 &\geq 20 \text{ ja} \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Vast: (0, 6) maksimiarvo 60.
Huom: Käytä Simplex -menetelmää.

22. Integroi

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+2}} dx & \text{b) } & \int x e^{x^2} dx. \\ \text{c) } & \int \frac{x}{x^2 \ln x^2} dx & \text{d) } & \int 2^{x^2+1} x dx & \text{e) } & \int \frac{x+1}{2x^2+4x+5} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vast: a) } & \frac{3}{4}(x^2+2x+2)^{\frac{2}{3}} + c, & \text{b) } & \frac{1}{2}e^{x^2} + c, & \text{c) } & \frac{1}{2} \ln |\ln x^2| + c, \\ & \text{d) } \frac{2^{x^2}}{\ln 2} + c, & \text{e) } & \frac{1}{4} \ln |2x^2+4x+5| + c. \end{aligned}$$

23. Integroi

$$\text{a) } \int x^2 |x| dx \quad \text{b) } \int \frac{dx}{1+e^x} \quad \text{c) } \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$\text{Vast: a) } \frac{1}{4}x^3|x| + c, \quad \text{b) } x - \ln(1+e^x) + c, \quad \text{c) } \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.$$

24. Integroi

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int (x^2 - \sqrt{x} + 2) dx & \text{b) } & \int \sqrt{2+5x} dx \\ \text{c) } & \int \frac{dx}{(3x+2)^2} & \text{d) } & \int \frac{x^3-1}{x-1} dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vast: a) } & \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{3}x\sqrt{x} + 2x + c, & \text{b) } & \frac{2}{15}\sqrt{2+5x}^3 + c, \\ & \text{c) } -\frac{1}{3(3x+2)} + c, & \text{d) } & \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x + c. \end{aligned}$$

25. Laske osittaisintegroinnilla

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int x e^{-x} dx & \text{b) } & \int x^7 \ln x dx \\ & & & \\ \text{c) } & \int x(-x+2)^5 dx & \text{d) } & \int (\ln x \cdot \frac{1}{x}) dx. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Vast: a) } & -e^{-x}(x+1) + c, & \text{b) } & \frac{1}{8}x^8(\ln x - \frac{1}{8}) + c, \\ & \text{c) } -\frac{1}{6}(-x+2)^6(x + \frac{1}{7}(-x+2)) + c, & \text{d) } & \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c. \end{aligned}$$

26. Laske osamurtokehittelmän avulla

$$\text{a) } \int \frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx \quad \text{b) } \int \frac{dx}{x^5 + 2x^3 + x}.$$

$$\text{Vast: a) } \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c, \quad \text{b) } \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c.$$

27. Integroi sopivalla sijoituksella

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x+3}} & \text{b) } \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-x^2}} \\ \text{c) } \int \frac{x^2 dx}{(1+2x)^{3/2}} & \text{d) } \int \frac{x^{1/2} + x^{1/6}}{x^{3/4}} dx. \end{array}$$

28. Määritä integraalit

$$\text{a) } \int_{-2}^2 x(x-1)^2 dx \quad \text{b) } \int_0^3 x|x-2| dx.$$

$$\text{Vast: a) } -\frac{32}{3} \quad \text{b) } \frac{8}{3}.$$

29. Määritä integraalit

$$\text{a) } \int_1^e \ln x dx,$$

$$\text{b) } \int_1^2 \frac{x+3}{x^2+3x+2} dx.$$

30. Laske käyrien $y = \sqrt{1-x}$ ja $y = \sqrt{x-2}$ sekä suorien $y = 1$ ja $y = 2$ rajoittaman alueen pinta-ala.

$$\text{Vast: } 17/3.$$

a) Suorita tehtävä x -akselin suhteen tarkasteltuna.

b) Suorita tehtävä y -akselin suhteen tarkasteltuna.

31. Laske käyrän $y^2 = 2x + 1$ ja suoran $x - y - 1 = 0$ rajoittaman alueen pinta-ala.

Vast: $16/3$.

a) Suorita tehtävä x -akselin suhteen tarkasteltuna.

b) Suorita tehtävä y -akselin suhteen tarkasteltuna.

32. Laske integraali $\int_0^1 x(1-x)^3 dx$

a) osittaisintegroinnilla b) sijoituksella.

Vast: $1/20$.

33. Laske Taylorin sarjakehitelmän avulla

$$\int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Huom: Käytä tarkkuutta $k = 3$.

Vast: $4e$.

34. Laske Puolisuunnikassäännön avulla

$$\int_0^2 e^{x^2} dx.$$

Huom: Käytä tarkkuutta $n = 4$.

Vast: $20,64$

35. Esitä funktiolle $f(x) = 2x^2 + 2x + 2$ Taylorin sarjakehitelmä.

36. a) Olkoon kompleksiluvut $a = 1 + 2i$ ja $b = 1 - 3i$.

Määrä \bar{a} , $a + b$, $a \cdot b$, a/b ja $|b|$.

b) Ratkaise yhtälö $2x^3 - 2x^2 + 18x - 18 = 0$, kun $x \in \mathbb{C}$.

37. Määrittää seuraavat trigonometrinen funktioiden arvot:

- | | | |
|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| a) $\cos 0$, | b) $\sin 0$, | c) $\tan 0$, |
| d) $\cos \frac{\pi}{2}$, | e) $\sin \frac{\pi}{2}$, | f) $\tan \frac{\pi}{2}$, |
| g) $\cos \pi$, | h) $\sin \pi$, | i) $\tan \pi$, |
| j) $\cos \frac{3\pi}{2}$, | k) $\sin \frac{3\pi}{2}$, | l) $\tan \frac{3\pi}{2}$, |
| m) $\cos \frac{\pi}{4}$, | n) $\sin \frac{\pi}{4}$, | o) $\tan \frac{\pi}{4}$, |
| p) $\cos \frac{\pi}{6}$, | q) $\sin \frac{\pi}{6}$, | r) $\tan \frac{\pi}{6}$, |
| s) $\cos \frac{\pi}{3}$, | t) $\sin \frac{\pi}{3}$, | u) $\tan \frac{\pi}{3}$, |

38. Ratkaise yhtälö $\sin 2x = \cos x$ kahdella tavalla.

39. Integroi / derivoi

- | | | |
|-------------------------------------|--------------------------|----------------------------|
| a) $\int_0^{\pi/2} \cos 3x \, dx$, | b) $\int \tan x \, dx$, | c) $\int \sin^2 x \, dx$, |
| d) $D \cos 3x$, | e) $D \tan 2x$, | f) $D \sin^2 2x$. |

(käytä kaavoja)

40. Integroi

- | | |
|--|---------------------------------|
| a) $\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}} dx$, | b) $\int \frac{2}{4x^2+9} dx$. |
|--|---------------------------------|

41. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 2x.$$

42. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + e^x.$$

43. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(1+x^2) \frac{dx}{dy} + x(1+y) = 0.$$

44. Ratkaise differentiaaliyhtälö (käytä 2. tapaa)

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2}.$$

45. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$(x + y)dx + (x - y)dy = 0$$

alkuehdolla $y(0) = 0$.

- a) Käsittele homogeenisena differentiaaliyhtälönä.
- b) Käsittele eksaktina differentiaaliyhtälönä.

46. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y' = -y^2$$

alkuehdolla $y(0) = 1$.

47. Ratkaise differentiaaliyhtälö

$$y'' - y = e^x.$$

48. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta y_t = 5 - 5y_t$$

alkuehdolla $y_0 = 2$.

49. Ratkaise differenssiyhtälö

$$y_{t+2} - 4y_t = 5$$

alkuehdolla $y_0 = 1/3$ ja $y_1 = -5/3$.

50. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta^2 y_t = 5 - 2y_{t+1} + 5y_t$$

alkuehdolla $y_0 = 1/3$ ja $y_1 = -5/3$.

51. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta y_t = 5 - 5y_t$$

alkuehdolla $y_0 = 2$.

52. Ratkaise differenssiyhtälö

$$y_{t+2} - 4y_t = 5$$

alkuehdolla $y_0 = 1/3$ ja $y_1 = -5/3$.

53. Ratkaise differenssiyhtälö

$$\Delta^2 y_t = 5 - 2y_{t+1} + 5y_t$$

alkuehdolla $y_0 = 1/3$ ja $y_1 = -5/3$.