

806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I

Harjoitus 1, viikko 3, kevät 2011

(Muut kuin taloustieteiden tiedekunnan opiskelijat)

Summaoperaattorin Σ käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta välttyttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori Σ (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n \quad .$$

Jos $x_1 = \dots = x_n = c =$ vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = n \cdot c \quad .$$

Esimerkkejä:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & \sum_{i=5}^8 y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8 \\ \sum_{i=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15 & \sum_{i=4}^6 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30 \\ \sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6 & \sum_{k=1}^4 k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \end{array}$$

Merkinnällä $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ tarkoitetaan summaa $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

1. Olkoon $x_1 = 5$, $x_2 = 4$, $x_3 = 1$, $x_4 = -2$ ja $x_5 = 2$ sekä $y_1 = -3$, $y_2 = 0$, $y_3 = -4$, $y_4 = 6$ ja $y_5 = 6$. Laske seuraavien summien arvot.

a) $\sum_{i=1}^5 x_i$ b) $\sum_{i=1}^5 x_i^2$ c) $(\sum_{i=1}^5 x_i)^2$ d) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$ e) $(\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)$
f) $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$ g) $\sum_{i=1}^5 (i - 5)x_i$ h) $\sum_{i=1}^5 x_i(y_i - 3)$
i) $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, missä \bar{x} ja \bar{y} ovat x :n ja y :n keskiarvot, $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ ja $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$

2. Esitä Σ -merkkiä käyttäen

a) $x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$ b) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$
c) $2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 16x_4$ d) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$
e) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ f) $\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$
g) $(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2$

3. Todista (suoraan laskemalla) seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet (a, b ja c mielivaltaisia reaaliavakioita).

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{b) } \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + nc$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

4. Kahden muuttujan (x ja y) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 118, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 6 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 64.$$

Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

$$\text{a) } \sum_{i=1}^6 3x_i \quad \text{b) } \sum_{i=1}^6 (2x_i - 5) \quad \text{c) } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i) \quad \text{d) } \sum_{i=1}^6 (x_i - y_i)^2$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y}) \quad \text{f) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{g) } \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

5. Tarkastellaan alla olevaa yksinkertaista taulukkoa, jossa on kolme riviä ja neljä saraketta (ts. 3×4 -taulukko). Merkinnällä x_{ij} tarkoitetaan taulukon rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua. Tässä tehtävässä siis esimerkiksi $x_{23} = 7$.

3	5	-3	2
0	-1	7	3
2	-2	1	4

Laske annettujen tietojen perusteella seuraavien summien arvot.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^3 x_{i2} \quad \text{b) } \sum_{j=1}^4 x_{3j} \quad \text{c) } \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^4 x_{ij}$$

6. Esitä summana $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$.

Vastauksia tehtäviin:

1: a) 10 b) 50 c) 100 d) -19 e) 50 f) 15 g) -32 h) -49 i) -29

4: a) 72 b) 18 c) 30 d) 150 e) 0 f) 58 g) -8

5: a) 2 b) 5 c) 21

Huom. Muista ilmoittautua kurssille WebOodissa!

Harjoitustehtävät löytyvät myös nettiosoitteesta

<http://math.oulu.fi/materiaalit/harjoitukset/kevat11>