

## Kompleksianalyysi II

Harjoitus 3, kevät 2010

1. Olkoon  $f$  koko tasossa  $\mathbb{C}$  analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$$

aina kun  $z \in \mathbb{C}$ . Osoita, että  $f$  on vakiofunktio.

2. Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $A$ . Osoita, että ehdosta  $|f(z)| = a = \text{vakio}$ ,  $z \in A$  seuraa, että  $f(z)$  on vakiofunktio  $A$ :ssa.

3. Olkoon  $f$  analyyttinen kiekossa  $D_R(0)$ . Oletetaan, että  $f$  ei ole vakiofunktio. Määritellään funktio  $g$  ehdolla

$$g(r) = \max_{z \in D_r(0)} |f(z)|, \quad 0 < r < R.$$

Osoita, että  $g(r_1) < g(r_2)$ , kun  $0 < r_1 < r_2 < R$ .

4. Olkoon  $f(z) = \cos z$ ,  $z \in \mathbb{C}$ . Määrää  $\max_{|z| \leq 1} |f(z)|$ .

5. Tutki funktiojonon  $f_n$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , suppenemista joukossa  $E \subset \mathbb{C}$ , kun

a)  $f_n(z) = \frac{nz}{z+n}$ ,  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ ,

b)  $f_n(z) = \frac{nz}{nz+1}$ ,  $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$ .

Onko suppeneminen tasaista joukossa  $E$ ?