

## KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, kevät 2012

1. Määrää seuraavien sarjojen suppenemissäteet ja suppenemiskiekot

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k + 1} z^k, \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} (z-1)^k, \quad \text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} k^2 z^k, \quad \text{d) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^3}{3^k} z^k.$$

2. Määrää sarjan  $\sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{2}i} \right)^{k+1} (z - \frac{1}{2}i)^k$  suppenemissäde. Määrää myös sarjan summa.

3. Tunnetusti  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ , kun  $|z| < 1$ . Määrää funktio  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ , kun  $|z| < 1$ .

4. Lausu funktio  $f(z) = \sin z$ , Taylor-sarjana pisteessä  $z = \frac{\pi}{4}$ .

5. Lausu funktio  $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$  Taylor-sarjana pisteessä  $z = 2$ .

6. Määrää funktion  $f(z) = e^z - 1 - \sin z$  nollakohdan  $z = 0$  kertaluku.