KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 5, kevät 2012

1. Jatka funktio f analyyttisesti mahdollisimman laajaan alueeseen, kun

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}.$$

2. Olkoon $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ ja $g(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2+i)^{k+1}}$. Osoita, että funktiot f ja g ovat toistensa analyyttisiä jatkeita.

3. Olkoon f yksikkökiekossa analyyttinen funktio, joka toteuttaa ehdon

$$f\left(\frac{n}{2n+1}\right) = f\left(\frac{n}{2n+1} i\right)$$

kaikilla $n = 2, 3, \cdots$. Osoita, että funktion f kymmenes derivaatta pisteessä nolla on nolla.

4. Määrää funktion f Laurent-kehitelmä pisteessä $z_0 = 0$ ja tutki millainen erikoispisten 0 on ja laske residy, kun

a) $f(z) = \dfrac{1 - \cos z}{z}$, b) $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3}$.

5. Määrää funktion

$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$

Laurent-kehitelmä pisteessä $z_0 = 0$.

6. Osoita, että rengasalueessa $A = \{z \in \mathbb{C} | R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, analyyttisen funktion f Laurent-kehitelmä on yksikäsiteinen; ts., jos $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z - z_0)^n$ kaikilla $z \in A$, niin $a_n = b_n$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.