

Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 1 kevät 2012

- Luku $2^{71} + 15$ jaetaan luvulla $2^{67} - 3$. Mikä on jakojäännös?
- Esitä luku 417_8 kymmenjärjestelmän lukuna.
 - Esitä luku 417_8 binäärijärjestelmän lukuna.
 - Esitä luku 123_{10} kahdeksanjärjestelmän lukuna.
 - Esitä luku 1100011_2 kahdeksanjärjestelmän lukuna.
- Olkoot a, b, c, m ja n kokonaislukuja.
 - Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \mid b$. Osoita, että $c \mid (a + b)$.
 - Oletetaan, että $a \mid b$ ja $b \mid c$. Osoita, että $a \mid c$.
 - Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \mid b$. Osoita, että $c \mid (ma + nb)$.
 - Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \mid (a + b)$. Osoita, että $c \mid b$.
- Määrää kaikki lukua 110 pienemmät alkuluvut.
- Osoita Lauseen 1.2 avulla, että jokainen kokonaisluku on jotain seuraavista muodoista:
$$4q, \quad 4q + 1, \quad 4q + 2, \quad 4q + 3,$$
missä $q \in \mathbb{Z}$.
- Oletetaan, että $2^n - 1$, missä $n \in \mathbb{Z}$, on alkuluku. Osoita käyttämällä tulosta
$$x^k - y^k = (x - y)(x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + xy^{k-2} + y^{k-1}),$$
missä $k \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, apuna, että n on alkuluku. Osoita myös, että käänteinen väite ei pidä paikkaansa. (Käänteinen väite: Jos n on alkuluku, niin $2^n - 1$ on alkuluku.)
- Osoita, että kahden muotoa $4k + 1$ olevan kokonaisluvun tulo on myöskin muotoa $4k + 1$.
 - Osoita, että kahden muotoa $4k + 3$ olevan kokonaisluvun tulo on muotoa $4k + 1$.
 - Osoita, että parittoman kokonaisluvun neliö on muotoa $8k + 1$.
- Olkoot $n \geq 3$ ja $n^2 + 2$ alkuluku. Osoita, että $3 \mid n$.
- Olkoot a ja b kokonaislukuja, joista ainakin toinen on nollasta eroava.
 - Osoita, että $\text{syt}(a, b)$ on yksikäsitteinen.
 - Merkitään $\text{syt}(a, b) = d$. Osoita, että $\text{syt}(a/d, b/d) = 1$.