

# Lukuteoria ja ryhmät

## Harjoitus 2 kevät 2012

- Määrää Eukleideen algoritmilla suurin yhteinen tekijä seuraaville luvuille ja esitä se näiden kokonaislukujen lineaarikombinaationa:
  - 478 ja 212,
  - 201 ja 1024.
- Esitä luku 3 lukujen 201 ja 1024 lineaarikombinaationa.
  - Onko olemassa sellaisia kokonaislukuja  $r$  ja  $s$ , että  $1841r + 3647s = 1$ ?
- Oletetaan, että  $k \in \mathbb{Z}_+$ . Osoita, että luvut  $3k + 2$  ja  $5k + 3$  ovat suhteellisia alkulukuja.
  - Olkoot  $a$  ja  $b$  sellaisia kokonaislukuja, että niiden suurin yhteinen tekijä  $\text{sy}(a, b) = 1$ . Osoita, että  $\text{sy}(a + b, a - b) = 1$  tai 2.
- Olkoot  $a, b$  ja  $m$  positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että  $\text{sy}(ma, mb) = m\text{sy}(a, b)$ .
  - Oletetaan, että  $c \mid ab$ . Osoita, että  $c \mid \text{sy}(a, c)b$ .
- Esitä seuraavat kokonaisluvut alkulukujen tulona ja määrää näiden esitysten avulla lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava:
  - 96 ja 525,
  - 5040 ja 7700.
- Mitkä seuraavista kongruensseista ovat tosia?
  - $111 \equiv -9 \pmod{40}$ ,
  - $2 \equiv 99 \pmod{7}$ ,
  - $630 \equiv 1 \pmod{37}$ .
- Määrää luvun  $7^{2012}$  viimeinen numero.
  - Osoita, että  $13 \mid (3^{215} - 9)$ .
  - Osoita, että luku  $7^{4n} + 9^{2n+1}$  päättyy aina samaan numeroon ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).
  - Määrää luvun  $4^{52}$  kaksi viimeistä numeroa.