

Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 4 kevät 2012

- Määrätään relaatio R asettamalla
 - x on y :n isä,
 - x on y :n ystävä,
 - x on y :n jälkeläinen.Onko relaatio R refleksiivinen, symmetrinen tai transitiivinen?
- Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Mitkä seuraavista joukon $A \times A$ osajoukoista ovat ekvivalenssirelaatioita.
 - $\{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\}$,
 - $\{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\}$,
 - $\{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4)\}$.
- Määritellään joukon \mathbb{Z} relaatio R seuraavasti:
 - aRb , jos on olemassa sellainen kokonaisluku $m \in \mathbb{Z}$, että $a = bm$.
 - aRb , jos $a + b$ on parillinen.Onko R ekvivalenssi relaatio? Jos R on ekvivalenssirelaatio, mitkä ovat ekvivalenssiluokat?
- Määritellään joukon \mathbb{R} relaatio R asettamalla $xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}$. Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio. Määrää $[\sqrt{2}]$.
 - Määritellään joukon $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ relaatio R asettamalla $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$. Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio. Osoita, että ekvivalenssiluokkien joukko on kokonaislukujen joukko.
- Laske $\varphi(n)$, kun n on
 - 27,
 - 252,
 - 2000,
 - 1776.
- Luku 44^{49} jaetaan luvulla 105. Mikä on jakojäännös?
 - Määrää luvun 41^{82} kaksi viimeistä numeroa.
 - Määrää luvun 7^{1999} kolme viimeistä numeroa.
 - Tarkastellaan lukuja 9, 99, 999, 9999, jne. Onko näiden lukujen joukossa sellaista, joka on jaollinen luvulla 71?
- Olkoon n positiivinen kokonaisluku ja p alkuluku. Osoita, että $n \mid \varphi(p^n - 1)$. (Vihje: Etsi sellainen luku a , että $\text{syt}(a, p^n - 1) = 1$. Käytä Eulerin teoreemaa. Lisäksi luku $\varphi(p^n - 1)$ kannattaa esittää jakoyhtälön avulla, kun jakajana on n .)