Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 5 kevät 2012

1. Tutki, onko operaatio $(*)$ binäärinen seuraavissa tapauksissa:
   a) $a * b = \frac{a+b}{3}$ joukossa $\mathbb{Z}$, b) $a * b = a + \frac{ab}{7}$ joukossa $\mathbb{Q}$.

2. Tarkastellaan joukkoja $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ja $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja laskutoimituksia yhteenlasku $(+)$, kertolasku $(\cdot)$ ja vähennyslasku $(-)$. Mitkä seuraavista pareista ovat ryhmiä:
   a) $(\mathbb{R}, +)$, b) $(\mathbb{R}_+, +)$, c) $(\mathbb{R}^*, +)$, d) $(\mathbb{R}, \cdot)$, e) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, f) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$, g) $(\mathbb{R}, -)$, h) $(\mathbb{R}_+, -)$, i) $(\mathbb{R}^*, -)$?

3. Olkoon $M = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $\det A \neq 0\}$. Osoita, että $(M, \cdot)$ on ryhmä, missä $(\cdot)$ on matriisien kertolasku. (Käytä lineaarialgebrasta tuttuja matriisien laskusääntöjä hyväksi todistamisessa.) Onko $(M, \cdot)$ Abelin ryhmä?

4. Olkoon G ryhmä, $a, b, c \in G$ ja e ryhmän G neutraalialkio. Osoita:
   a) Jos $(ab)^2 = a^2b^2$, niin $ab = ba$.
   b) Jos $abc = e$, niin myös $bca = e$.
   c) Jos $g^2 = e$ kaikilla $g \in G$, niin G on Abelin ryhmä.

5. Olkoon $A = \{1, -1, i, -i\}$. Osoita, että $(A, \cdot)$ on ryhmä, missä $(\cdot)$ on kompleksilukujen kertolasku. (Osoituksessa voit käyttää apuna 'ryhmätaulua'.)

6. Kirjoita ryhmän ryhmätaulu ja määrää jokaisen alkion käänteisalkio:
   a) $(\mathbb{Z}_7, +)$, b) $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$, c) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$.

7. Kuinka monta alkiota on ryhmässä $\mathbb{Z}_{980}^*$? Osoita, että $[39]$ on ryhmän $\mathbb{Z}_{980}^*$ alkio. Määrää alkion $[39]$ käänteisalkio ryhmässsä $\mathbb{Z}_{980}^*$.

8. Ratkaise ryhmässä $\mathbb{Z}_8$ yhtälöpari $\begin{cases} x + x + [4] + y + y & = [0] \\ x + [2] + y & = [4] \end{cases}$.

9. Olkoon G ryhmä ja $|G| = 2r$, missä $r \geq 1$. Osoita, että ryhmässä G on sellainen alkio, jolle $x \neq e$ ja $x^2 = e$.