

## Lukuteoria ja ryhmät

### Harjoitus 6 kevät 2012

- Mitkä seuraavista ovat ryhmän  $(\mathbb{Z}_8, +)$  aliryhmiä:  $H_1 = \{[0], [4]\}$ ,  $H_2 = \{[0], [3], [6]\}$  ja  $H_3 = \{[0], [2], [4], [6]\}$ ?
  - Määrää edellä oleville aliryhmille vasemmat ja oikeat sivuluokat.
- Kirjoita ryhmän  $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$  ryhmätaulu.
  - Onko  $H_1 = \{[1], [5], [11]\}$  ryhmän  $\mathbb{Z}_{14}^*$  aliryhmä?
  - Osoita, että  $H_2 = \{[1], [9], [11]\}$  on ryhmän  $\mathbb{Z}_{14}^*$  aliryhmä.
  - Määrää aliryhmän  $H_2$  vasemmat ja oikeat sivuluokat.
- Jos ryhmän kertaluku on 36, niin mitä voit sanoa aliryhmien kertaluvuista?
- Olkoon  $G$  ryhmä sekä  $H$  ja  $K$  ryhmän  $G$  aliryhmiä.
  - Osoita,  $H \cap K$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.
  - Onko  $H \cap K$  ryhmien  $H$  ja  $K$  aliryhmä?
  - Tiedetään, että  $|K| = 40$  ja  $|H| = 33$ . Mitä voit sanoa aliryhmän  $H \cap K$  kertaluvusta?
- Olkoon  $G$  ryhmä. Olkoot  $H \leq G$  ja  $N(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$ . Osoita, että  $N(H) \leq G$ .
- Olkoon  $G$  Abelin ryhmä. Olkoot  $H \leq G$  ja  $K \leq G$ . Merkitään  $HK = \{ab \mid a \in H, b \in K\}$ . Osoita, että  $HK \leq G$ .
- Osoita, että ryhmä  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$  on syklinen.
  - Mitkä ovat ryhmän  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$  aliryhmät?
  - Määrää kertalukua 6 olevan syklisen ryhmän  $G = \langle a \rangle$  kaikki aliryhmät.
- Onko ryhmä  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  syklinen?
  - Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  kaikki aliryhmät.
- Osoita, että  $(\mathbb{Z}, +)$  on syklinen ryhmä.
  - Osoita, että syklisen ryhmän  $(\mathbb{Z}_m, +)$  generoi mikä tahansa alkio  $[a]$ , jolle  $\text{synt}(a, m) = 1$ .