Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 7 kevät 2012

1. Olkoon G ryhmä. Olkoot $H \leq G$ ja $N(H) = \{a \in G \mid aH = Ha\}$. Aikaisemmin on osoitettu, että $N(H) \leq G$. Osoita, että $H \trianglelefteq N(H)$.

2. Olkoot G ryhmä ja $M \trianglelefteq G$ sekä $N \trianglelefteq G$. Osoita, että $M \cap N \trianglelefteq G$. (Edellisen harjoituksen 4. tehtävän a)-kohdan tietoa voi käyttää hyväksi.)

3. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ on aliryhmä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$. Muodosta tekijäryhmän $\mathbb{Z}_{20}/H$ ryhmätaulu. Miksi tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{20}/H$ on olemassa?

4. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$. Määrää tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{15}^*/\langle[4]\rangle$ ja muodosta sen ryhmätaulu, jos tekijäryhmä on olemassa.

5. Olkoon $G = \langle a \rangle$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä. Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G:n normaali aliryhmä. Muodosta tekijäryhmän G/K ryhmätaulu.

6. Olkoot α, β, $\gamma \in S_4$,
   $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Määrää $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \gamma$ ja $\gamma \circ \alpha$.
   b) Määrää käänteisalkiot α^{-1}, β^{-1} ja γ^{-1}.
   c) Ratkaise yhtälö $\alpha \circ x = \gamma$.
   d) Määrää ryhmien $\langle\alpha\rangle$, $\langle\beta\rangle$ ja $\langle\gamma\rangle$ kertaluvut.

7. Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_3. Merkitään
   $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
   $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Tutki ovatko joukot $H_1 = \{e, \sigma_4\}$ ja $H_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ ryhmän S_3 normaaleja aliryhmiä. Muodosta normaalin aliryhmän tapauksessa tekijäryhmä ja sen ryhmätaulu.

8. Koska $(\mathbb{R}, +)$ on Abelin ryhmä, sen aliryhmä $\mathbb{Z}$ on normaali ja tekijäryhmä $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on siis määritelty. Perustele, miksi tekijäryhmän alkiot voidaan lausua muodossa $q + \mathbb{Z}$, missä $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$. Lausu tässä muodossa alkiot $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) + (\frac{2}{3} + \mathbb{Z})$ ja $-(\frac{3}{4} + \mathbb{Z})$. Mikä on alkion $\frac{35}{99} + \mathbb{Z}$ kertaluku?

9. Olkoot G ryhmä ja H sen aliryhmä, jolle $|G|/|H| = 2$ (vasempien sivuluokkien lukumäärä). Osoita, että H on G:n normaali aliryhmä.

10. Olkoot G ryhmä ja M sekä N ryhmän G normaaleja aliryhmiä. Todista: Jos $M \cap N = \{e\}$, niin $xy = yx$ aina, kun $x \in M$ ja $y \in N$.