Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 8 kevät 2012

1. Olkoot G Abelin ryhmä ja $f\colon G \to G$, $f(a) = a^2$.
   a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
   b) Olkoon $G = \mathbb{Z}_7^*$. Määrää $\mathrm{Im}(f)$ ja $\mathrm{Ker}(f)$.

2. Olkoon G ryhmä ja $f\colon G \to G$, $f(a) = a^{-1}$. Osoita, että f on ryhmähomomorfismi, jos ja vain jos G on Abelin ryhmä.

3. Osoita, että ryhmähomomorfismi $f\colon G \to G'$ on injektio, jos ja vain jos $\mathrm{Ker}(f) = \{1_G\}$.

4. Olkoot G syklinen ryhmä, H ryhmä sekä $G \cong H$. Osoita, että H on syklinen.

5. Onko ryhmä $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ kanssa, kun
   a) $m = 9$, b) $m = 5$, c) $m = 8$?

6. Olkoot $f\colon G \to G'$ ja $g\colon G' \to G''$ ryhmähomomorfismeja.
   a) Osoita, että $g \circ f\colon G \to G''$ on homomorfismi.
   b) Olkoot f ja g isomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on isomorfismi.

7. Olkoon $f\colon G \to G'$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että $f^{-1}\colon G' \to G$ on isomorfismi.

8. Osoita, että ryhmien välinen isomorfia on ekvivalenssirelaatio missä tahansa ryhmistä muodostuvassa joukossa.

9. Kuvaus $f\colon (\mathbb{Z}_{32}^*) \to (\mathbb{Z}_{32}^*)$, $f(a) = a^2$, on ryhmähomomorfismi. Osoita, että $(\mathbb{Z}_{32}^*/\mathrm{Ker}(f), \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

10. Olkoot $M = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A \neq 0\}$
    ja $N = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A = 1\}$.
    Osoita, että $(N, \cdot) \trianglelefteq (M, \cdot)$ ja $(M/N, \cdot) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\})$.