

## Permutaatiot, kunnat ja Galois'n teoria

Harjoitus 5, kevät 2012

1. Olkoon  $G$  transitiivinen permutaatioryhmä äärellisen joukon  $X$  suhteen ( $|X| \geq 2$ ). Osoita, että ryhmässä  $G$  on sellainen alkio  $g$ , että  $g(i) \neq i$  aina, kun  $i \in X$ .
2. Kuinka monella eri tavalla  $4 \times 4$ -ruudukko voidaan värittää, jos käytettävissä on kaksi väriä? Ruudukon värityksiä pidetään samana, mikäli ne saadaan toisistaan ruudukkoa kiertämällä.  
(Vihje: Numeroi ruudut  $1, 2, \dots, 16$  ja tutki, millainen permutaatio  $\alpha$  joukossa  $\{1, 2, \dots, 16\}$  vastaa  $90^\circ$  kiertoa myötäpäivään, sovelta ei-Burnsiden lemmaa permutaatioryhmään  $\langle \alpha \rangle$ .)
3. Kuution tahkot väritetään käyttämällä valkoista, punaista ja sinistä väriä ja jokaista näistä kolmesta väristä käytetään ainakin yhden tahkon värittämiseen. Kuinka monta erilaista kuution väritystä saadaan? (Kaksi väritystä ovat samanlaiset, mikäli ne saadaan toisistaan kuution kiertojen avulla.)

*Sen joukon johtajaksi nimittäisin,  
ken pitkäkaulaisin on, pienipäisin  
ja takapuoleltansa täyteläisin.*

*Kas, kun jää painopiste  
matalalle, voi nousta kukonnuppi  
korkealle ja loistaa tunkiolta  
maailmalle.*