

806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I

Harjoitus 1, viikko 3, kevät 2012

(Muut kuin taloustieteiden tiedekunnan opiskelijat)

Summaoperaattorin Σ käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta välttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori Σ (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n .$$

Jos $x_1 = \dots = x_n = c =$ vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = n \cdot c .$$

Esimerkkejä:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=5}^8 y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

$$\sum_{i=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sum_{i=4}^6 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{k=1}^4 k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Merkinnällä $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$ tarkoitetaan summaa $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}$
 $+ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n}$
 $+ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

1. Olkoon $x_1 = 5, x_2 = 4, x_3 = 1, x_4 = -2$ ja $x_5 = 2$ sekä $y_1 = 5, y_2 = 0, y_3 = -2, y_4 = -4$ ja $y_5 = 1$. Laske seuraavien summien arvot.

a) $\sum_{i=1}^5 x_i$ b) $\sum_{i=1}^5 x_i^2$ c) $(\sum_{i=1}^5 x_i)^2$ d) $\sum_{i=1}^5 x_i y_i$ e) $(\sum_{i=1}^5 x_i)(\sum_{i=1}^5 y_i)$

f) $\sum_{i=1}^5 i$ g) $\sum_{i=1}^5 (x_i + y_i)$ h) $\sum_{i=1}^5 (i - 5)x_i$ i) $\sum_{i=1}^5 x_i (y_i - 3)$

j) $\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$, missä \bar{x} ja \bar{y} ovat x :n ja y :n keskiarvot, $\bar{x} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_i$ ja $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i$

2. Esitä Σ - merkkiä käyttäen

a) $x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$

b) $x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$

c) $(x_1 + x_2 + \dots + x_{100})^2$

d) $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$

e) $(x_1 - 1) + (2x_2 - 4) + (3x_3 - 9) + (4x_4 - 16)$

f) $\frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r}{f_1 + f_2 + \dots + f_r}$

3. Todista (suoraan laskemalla) seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet (a, b ja c mielivaltaisia reaali-
valtaisia reaalivakioita).

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i \qquad \text{b) } \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + nc$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

4. Kahden muuttujan (x ja y) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 118, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 6 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 64.$$

Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

$$\text{a) } \sum_{i=1}^6 3x_i \quad \text{b) } \sum_{i=1}^6 (2x_i - 5) \quad \text{c) } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i) \quad \text{d) } \sum_{i=1}^6 (x_i - y_i)^2$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y}) \quad \text{f) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 \quad \text{g) } \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

5. Tarkastellaan alla olevaa yksinkertaista taulukkoa, jossa on kaksi riviä ja viisi saraketta (ts. 2×5 -
taulukko). Merkinällä x_{ij} tarkoitetaan taulukon rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua. Tässä
tehtävässä siis esimerkiksi $x_{24} = 13$.

10	11	12	15	12
11	46	25	13	3

Laske annettujen tietojen perusteella seuraavien summien arvot.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^2 x_{i2} \quad \text{b) } \sum_{j=1}^5 x_{2j} \quad \text{c) } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 x_{ij}$$

6. Täydennetään seuraavaksi tehtävän 5 taulukkoa antamalla riveille ja sarakkeille otsikot. Taulukon luvut liittyvät kevään 2012 tilastotieteen perusmenetelmät I kurssille 11.1.2012 mennessä ilmoittautuneisiin opiskelijoihin, joita on kaikkiaan 158 kappaletta. Opiskelijan opintosuuntaa määriteltäessä luokkaan "Taloustiede" on laskettu mukaan kaikki taloustieteiden tiedekunnassa ensisijaisesti opiskelevat. Merkinällä x_{ij} tarkoitetaan edelleen taulukon rivillä i sarakkeessa j olevaa lukua.

Taulukko: Kevään 2012 tilastotieteen perusmenetelmät I kurssille 11.1.2012 mennessä ilmoittautuneet opiskelijat.

Sukuopuoli	Opiskelijan opintosuunta				
	Biokemia	Biologia	Maantiede	Taloustiede	Muu
Mies	10	11	12	15	12
Nainen	11	46	25	13	3

a) Mitä nyt tarkoittaa (eli miten tulkitset)

a1) luku x_{23} ?

a2) tehtävässä 5 a) esiintynyt summa $\sum_{i=1}^2 x_{i2}$?

a3) tehtävässä 5 b) esiintynyt summa $\sum_{j=1}^5 x_{2j}$?

a4) tehtävässä 5 c) esiintynyt summa $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 x_{ij}$?

b) Laske $100 \cdot \frac{x_{23}}{\sum_{j=1}^5 x_{2j}}$. Mitä laskun lopputulos tarkoittaa?

c) Laske $100 \cdot \frac{x_{23}}{\sum_{i=1}^2 x_{i3}}$. Mitä laskun lopputulos tarkoittaa?

7. Esitä summana $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$.

Vastauksia tehtäviin:

1: a) 10 b) 50 c) 100 d) 33 e) 0 f) 15 g) 10 h) -32 i) 3 j) 33

4: a) 72 b) 18 c) 30 d) 150 e) 0 f) 58 g) -8

5: a) 57 b) 98 c) 158

- Harjoitustehtävät löytyvät myös nettiosoitteesta
<http://math.oulu.fi/materiaalit/harjoitukset/kevat12>
- Harjoitustehtävien omatoimisessa laskemisessa voit käydä kysymässä neuvoa myös matemaattisten tieteiden laitoksen ns. tutortuvasta (sali M204, 2. kerros), jossa päivystää tilastotieteen perusmenetelmät I:n harjoitustehtävien laskemisessa opastava henkilö tiistaisin klo 14–16.