

# KOMPLEKSIANALYYSI I

## Harjoitus 3, kevät 2013

1. Ratkaise yhtälöt

a)  $z^4 = -1$ ,      b)  $z^3 = -i$ .

2. Olkoon  $A = \{i, \frac{i}{2}, \frac{i}{3}, \dots\} \subset \mathbb{C}$ . Tutki onko  $A$  rajoitettu, suljettu, avoin. Määrää  $A'$  ja  $cl(A)$ .

3. Määrää pisteiden  $1 + i$  ja  $-3 + 2i$  kautta kulkevan suoran yhtälö

a) parametrimuodossa,

b) muodossa  $ax + by = d$ ,  $a, b, d \in \mathbb{R}$ ,

c) muodossa  $\bar{a}z + \alpha\bar{z} = \gamma$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$  ja  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Määrää myös y.o. pisteiden välisen janan yhtälö.

4. Määrää seuraavat raja-arvot (mikäli ovat olemassa)

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{i^n}{n}$ ,    b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-i)^n$ ,    c)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1+i)^n}{n}$ ,    d)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - in^2}{(1+i)n^{-1}}$ .

5. Olkoon  $(a_n)$  jono  $\mathbb{C}$ :ssä, jolle  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  on olemassa. Osoita, että joukko  $(a_n)_{n=1}^{\infty}$  on rajoitettu.

6. Olkoon jono  $(z_n) \subset \mathbb{C}$  määritelty ehdoilla  $z_0 = 3$  ja  $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + 2i$ . Osoita, että jono  $(z_n)$  suppenee ja määrää sen raja-arvo.