KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 4, kevät 2013

1. Tutki mitkä seuraavista funktioista ovat bijektioita $\mathcal{M}(f) \to \mathcal{A}(f)$ ja määrää $f^{-1} : \mathcal{A}(f) \to \mathcal{M}(f)$ mikäli mahdollista.

   a) $f(z) = \bar{z} + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   b) $f(z) = \frac{1}{z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

   c) $f(z) = z^2 + i,\ z \in \mathbb{C}$,

   d) $f(z) = z^2 + i,\ z \in S[0, \pi)$.

2. Olkoon $f : S[0, \frac{2\pi}{3}) \to \mathbb{C}$ funktio, jolle $f(z) = z^3 + i,\ z \in S[0, \frac{2\pi}{3})$. Tutki onko f bijektio $\mathcal{M}(f) \to \mathbb{C}$. Määrää $f^{-1}(1)$.

3. Määrää funktio $f(z) = f(x+iy)$ muodossa $f(z) = u(x, y)+iv(x, y), z \in \mathcal{M}(f)$, kun

   a) $f(z) = z^3, z \in \mathbb{C}$, b) $f(z) = \frac{1}{z^2}, z \neq 0$, c) $f(z) = e^{iz}, z \in \mathbb{C}$.

4. Osoita, että funktion raja-arvo $\lim_{z \to z_0} f(z) = a$ (mikäli on olemassa) on yksikäsitteinen.