

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 5, kevät 2013

1. Tutki funktion f raja-arvon olemassaoloa pisteessä $z = 0$, kun

a) $f(z) = \frac{\operatorname{Re}z}{z}$, b) $f(z) = \frac{z}{|z|}$, c) $f(z) = \frac{z\operatorname{Re}z}{|z|}$.

2. Laske raja-arvo $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{z^3 + z^2 + z + 1}{z - z_0}$, kun

a) $z_0 = -1$, b) $z_0 = i$, c) $z_0 = -i$, d) Laske raja-arvo $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^3 + i}{z - i}$.

3. Osoita jatkuvuuden määritelmän avulla, että funktio $f(z) = z^2 + 2z$, $z \in \mathbb{C}$, on jatkuva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.

4. Osoita, että funktio $f(z) = z^2$ on tasaisesti jatkuva joukossa $A = D_2(i)$. Onko f tasaisesti jatkuva joukossa $A = \mathbb{C}$?

5. Tutki onko funktioilla $f(z) = z|z|$, $z \in \mathbb{C}$ ja $y(z) = (z)^2$, $z \in \mathbb{C}$ derivaattaa missään pisteessä $z_0 \in \mathbb{C}$.