KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 6, kevät 2013

1. Määrää seuraavien funktioiden derivaatat (mikäli ovat olemassa)

   a) $f(z) = \dfrac{z^2+1}{(z^2-1)^2}, z \neq 1$ b) $f(z) = e^{\bar{z}}, z \in \mathbb{C}$,

   c) $f(z) = \mathrm{Im} z,\ z \in \mathbb{C}$, d) $(z) = z\mathrm{Im} z,\ z \in \mathbb{C}$.

2. Olkoon $f(z) = z^n, z \in S\ [0, \frac{2\pi}{n}\ [\ (n \geq 2)$. Määrää $f'(z), z \in \mathbb{C}$, ja $(f^{-1})(z)$, $z \in S\ ]0, \frac{2\pi}{n}\ [\ \setminus \{0\}$.

3. Olkoon $f(z) = z^3, z \in S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$. Tällöin $f^{-1} : \mathbb{C} \to S[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ on olemassa. Määrää $(f^{-1})'(i)$ ja $(f^{-1})'(-1)$.

4. Oletetaan, että g on koko $\mathbb{C}$:ssä analyyttinen funktio.
   Määritellään funktio $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \overline{g(\bar{z})}, z \in \mathbb{C}$.

   Tutki onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä.

5. Olkoon $f(z) = f(x+iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3), z = x + iy \in \mathbb{C}$. Osoita, että f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälön. Määrää $f'(z)$.

6. Olkoon $f(z) = e^{iz}, z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälön.