

KOMPLEKSIANALYYSI I

Harjoitus 7, kevät 2013

1. Ratkaise yhtälö

$$e^z = 2 + i.$$

2. Osoita, että funktio $f(z) = \frac{1}{z+i}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälön.

3. Osoita, että funktio

$$f(z) = \sin z$$

toteuttaa Cauchy-Riemannin yhtälön.

4. Osoita, että

$$\text{a) } e^{\bar{z}} = \overline{e^z}, \quad \text{b) } \sin \bar{z} = \overline{\sin z} \text{ aina, kun } z \in \mathbb{C}.$$

5. Määrää

$$\text{a) } \log(-4), \quad \text{b) } \log 3i, \quad \text{c) } \log(\sqrt{3} - i).$$

6. Olkoon f alueessa $A \subset \mathbb{C}$ analyyttinen funktio.

a) Oletetaan, että $f'(z) = 0$ aina, kun $z \in A$.

Osoita, että f on vakiofunktio A :ssa.

b) Oletetaan, että $f = u + iv$ ja u on vakiofunktio A :ssa. Osoita, että f on vakio A :ssa. Tutki myös tapaus, missä $u^2 + v^2$ on vakio funktio A :ssa.