Kompleksianalyysi II

Harjoitus 3, kevät 2013

1. Olkoon f koko tasossa $\mathbb{C}$ analyyttinen funktio, jolle

$$|f(z)| \leq \left|\frac{z+1}{z-1}\right|$$

aina kun $z \in \mathbb{C}$. Osoita, että f on vakiofunktio.

2. Olkoon f analyyttinen alueessa A. Osoita, että ehdosta $|f(z)| = a =$ vakio, $z \in A$ seuraa, että $f(z)$ on vakiofunktio A:ssa.

3. Olkoon $f(z) = \cos z, z \in \mathbb{C}$. Määrää $\max\limits_{|z|\leq 1}|f(z)|$.

4. Oletetaan, että funktiot $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, ovat jatkuvia joukossa $E \subset \mathbb{C}$. Oletetaan, että $f_n \to f$ tasaisesti E:ssä. Osoita, että f on jatkuva E:ssä.

5. Tutki funktiojonon $f_n, n = 1, 2, 3, \cdots$, suppenemista joukossa $E \subset \mathbb{C}$, kun
   a) $f_n(z) = \dfrac{nz}{z+n}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$,
   b) $f_n(z) = \dfrac{nz}{nz+1}, E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$.