KOMPLEKSIANALYYSI II

Harjoitus 4, kevät 2013

1. Määrää funktion $f(z) = e^z - 1 - \sin z$ nollakohdan $z = 0$ kertaluku.

2. Jatka funktio f analyyttisesti mahdollisimman laajaan alueeseen, kun
$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} kz^{k-1}.$$

3. Olkoon $f(z) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$. Tutki milloin sarja suppenee. Määrää $f(z)$:n lauseke. Onko f analyyttinen $\mathbb{C}$:ssä?

4. Olkoon $f(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}}$ ja $g(z) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{(2-i)^{k+1}}$. Osoita, että g on f:n analyyttinen jatke.

5. Lausu funktio $f(z) = \dfrac{z}{1-2z}$, Taylor-sarjana pisteessä $z = 0$.

6. Määrää funktion $f(z) = \dfrac{z-1}{z(z^2+1)}$ navat ja singulaariset osat navoissa.

7. Määrää funktion $f(z)$ navan $z = 0$ kertaluku ja määrää f:n singulaarinen osa tässä navassa, kun

   a) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4}$, b) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z^3}$.

8. Lausu funktio $f(z)$ Laurent-sarjana pisteessä $z = 0$ ja tutki millainen erikoispiste $z = 0$ on funktiolle $f(z)$, kun

   a) $f(z) = \dfrac{1-\cos z}{z}$, b) $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^3}$.