MPTT 2, Harjoitus vko 6

6 b) $\begin{cases} 2x+3y-2z=5 \\ x-2y+3z=2 \\ 4x-y+4z=1 \end{cases}$

$$(A|C)=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -2 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 5 \\ 4 & -1 & 4 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ -4 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 7 & -8 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & -8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x-2y+3z=2 \\ 7y-8z=1 \\ 0=8 \quad \text{id. epätosi} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua

d) $\begin{cases} 3x+4y-3z=-3 \\ 2x+3y+2z=5 \\ x+y+z=4 \\ 2x+2y+2z=5 \end{cases}$

$$(A|C)=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -3 & -3 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-2) \\ -3 \\ -2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -6 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow 0=-3 \quad \text{id. epätosi}$$

$\Rightarrow$ yhtälöryhmällä ei ole ratkaisua

⑧ a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$ 3 vaakariviä, 3 pystyriviä $\Rightarrow 1 \le r(A) \le 3$

Tavoitteena on muokata matriisi yläkolmiomuotoon, jolloin sen aste on helppo laskea

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$ diagonaalimatriisin determinantti (voidaan laskea myös normaalisti kehittämällä)

Lause 1.6.: $\det A \neq 0 \Rightarrow A^{-1} \exists$ ja $A$ on säännöllinen
$\Rightarrow r(A) = 3$ $(A_{n\times n})$ (Myös L.1.5. pätee)

HUOM. Matriisin rivin kertominen vakiolla $-\frac{1}{6}$ ei muuta matriisin astetta mutta muuttaa determinantin arvon.

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{matrix}$

$1 \le r(A) \le 4$ $\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $1 \le r(A) \le 3$

Eräs 3×3-alimatriisin determinantti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 3$$

(3 on suurin sellainen kokonaisluku, jolloin matriisilla A on olemassa 3×3-alimatriisi, jonka determinantti ≠ 0)

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ -6 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 24 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -1 \\ -2 \end{matrix}$

$1 \leq r(A) \leq 4 \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 \leq r(A) \leq 2$

Eräs 2×2-alimatriisin determinantti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow r(A) = 2$$

9 $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ Ominaisarvot saadaan yhtälön $|A - \lambda I_n| = 0$ reaalijuurina.

$$A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$ Yläkolmiomatriisin determinantin lävistäjän alkiot

$|A-\lambda I_3| = (5-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$ karakteristinen yhtälö

Tulon nollasääntö $\Rightarrow$ ominaisarvot ovat

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ ja $\lambda_3 = 5$

Ominaisarvoon $\lambda$ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälön $(A-\lambda I)\bar{x} = 0$ ratkaisuna $\bar{x}$ $(\bar{x} \neq 0)$.

$\lambda_1 = 1$ : $A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$(A-\lambda_1 I)\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{sij.} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_2 = -4x_1 \Rightarrow x_2 = -2x_1$$

Siis $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, missä $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lambda_2 = 2 : (A-\lambda_2 I)\bar{x} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = -10x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{10}{3}x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Siis $\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, missä $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_3 = 5$: $(A - \lambda_3 I)\bar{X} = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ -4x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ ja $x_1 \in \mathbb{R}$, koska 1. pystyrivi meni nollaksi

Siis $\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, missä $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

7 a) $\bar{x}_1 = (1, 1, 2)$
$\bar{x}_2 = (4, 5, 5)$
$\bar{x}_3 = (5, 8, 1)$

Lineaarisen riippuvuuden ehto:
$r_1\bar{x}_1 + r_2\bar{x}_2 + r_3\bar{x}_3 = \bar{0}$

Jos ehdosta seuraa, että $r_1 = r_2 = r_3 = 0$, niin vektorit $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$ ja $\bar{x}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia.

Jos yksi tai useampi $r_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, niin joku tai jotkut vektoreista voidaan esittää toistensa lineaarisena yhdisteenä. (lineaarikombinaatio)

$r_1(1,1,2) + r_2(4,5,5) + r_3(5,8,1) = (0,0,0)$

$\iff (r_1, r_1, 2r_1) + (4r_2, 5r_2, 5r_2) + (5r_3, 8r_3, r_3) = (0,0,0)$

$\iff \begin{cases} r_1 + 4r_2 + 5r_3 = 0 \\ r_1 + 5r_2 + 8r_3 = 0 \\ 2r_1 + 5r_2 + r_3 = 0 \end{cases}$

Gauss: $(A|\bar{o}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ \cdot 3 \\ \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} r_1 - 7r_3 = 0 \\ r_2 + 3r_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 7r_3 \\ r_2 = -3r_3 \end{cases}$

Siis $\begin{cases} r_1 = 7r_3 \\ r_2 = -3r_3 \\ r_3 \in \mathbb{R} \end{cases} \Rightarrow$ vektorit $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ja $\bar{x}_3$ ovat lineaarisesti riippuvia

Vast: Ei

Esim $-7(1,1,2) + 3(4,5,5) = (12,15,15) - (7,7,14)$
$= (5,8,1)$

b) $\bar{x}_1 = (1,1,2)$
$\bar{x}_2 = (4,5,5)$
$\bar{x}_3 = (-1,-2,2)$

$r_1(1,1,2) + r_2(4,5,5) + r_3(-1,-2,2) = (0,0,0)$
$\Leftrightarrow (r_1, r_1, 2r_1) + (4r_2 + 5r_2 + 5r_2) + (-r_3, -2r_3, 2r_3) = (0,0,0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} r_1 + 4r_2 - r_3 = 0 \\ r_1 + 5r_2 - 2r_3 = 0 \\ 2r_1 + 5r_2 + 2r_3 = 0 \end{cases}$

Gauss: $(A|\bar{o}) = \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 5 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-4) \\ +3 \\ \end{array}$

$\sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-3) \\ +1 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 0 \\ r_2 = 0 \\ r_3 = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$ vektorit $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ ja $\bar{x}_3$ ovat lineaarisesti riippumattomia

Vast: Kyllä