MPTT2, vko 7

(10) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = 2x - y \\ f_y = 2y - x \\ f_z = 14z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 14z = 0 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow x = 2y \\ \Rightarrow z = 0 \end{matrix} \; \Big\} \text{ sij.}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow 2\cdot 2y - y = 0 \\ &\Leftrightarrow 3y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \quad \Rightarrow x = 2\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Siis piste $\bar{X}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2) Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{X}_0$

$$H(\bar{X}_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$|H_1(\bar{X}_0)| = 2 > 0$

$|H_2(\bar{X}_0)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$

$|H_3(\bar{X}_0)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 14\cdot(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 14\cdot 3 = 42 > 0$

Siis $H(\bar{X}_0)$ on positiividefiniitti (Lause 1.8.2)

$\Rightarrow$ Piste $(0,0,0)$ on paikallinen minimikohta ja ainoana kriittisenä pisteenä ja minimikohtana absoluuttinen minimikohta

$f(0,0,0) = 0^2 + 0^2 + 7 \cdot 0^2 - 0 \cdot 0 = 0$ absoluuttinen minimiarvo

Nyt $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y = 0 \\ z = 0}} (x^2 + y^2 + 7z^2 - xy) = \infty$

$\Rightarrow$ ei absoluuttista maksimia

11 $f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 - 6z^2$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = 4x \\ f_y = 8y \\ f_z = -12z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 8y = 0 \\ -12z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

Siis piste $\bar{X}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2) Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{X}_0$

$H(\bar{X}_0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

$|H_1(\bar{X}_0)| = 4 > 0$

$|H_2(\bar{X}_0)| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 > 0$

$$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 \cdot (-12) = -384 < 0$$

$(-1)^i |H_i(\bar{x}_0)| > 0$?

$$(-1)^1 |H_1(\bar{x}_0)| = -4 < 0$$
$$(-1)^2 |H_2(\bar{x}_0)| = 32 > 0$$
$$(-1)^3 |H_3(\bar{x}_0)| = 384 > 0$$

Nyt lauseen 1.8. kohdat 1) ja 2) eivät toteudu vaikka $|H_i(\bar{x}_0)| \neq 0 \ \forall i$, joten kyseessä on kohta 3).

Näin ollen kriittinen piste $\bar{x}_0$ ei ole paikallinen ääriarvokohta.

Nyt $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ y=0 \\ z=0}} (2x^2 + 4y^2 - 6z^2) = \infty$

ja $\lim\limits_{\substack{z \to \infty \\ y=0 \\ x=0}} (2x^2 + 4y^2 - 6z^2) = -\infty$

$\Rightarrow$ ei absoluuttista maksimia eikä minimiä

(12) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ehdolla $x + y + z = 35$

Ehtoyhtälö $g(x,y,z) = x + y + z - 35$

muuttujat $n = 3$ ja yhtälörajoitteet $m = 1$

Lagrange-funktio:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$
$$= -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z - \lambda(x + y + z - 35)$$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - \lambda = 0 \\ -4y + x - \lambda = 0 \\ -2z + 1 - \lambda = 0 \\ x + y + z = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - \lambda = 0 \\ x - 4y - \lambda = 0 \\ -2z - \lambda = -1 \\ x + y + z = 35 \end{cases}$$

Gauss: $(A|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$ -1, $+2$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & -35 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 70 \end{array}\right) {+2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 70 \end{array}\right) {-1}, {-3} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -70 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 & -245 \end{array}\right) {-1}, {-4}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \end{array}\right) {-3}, {+2} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 0 & -39 & 828 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & -483 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{23}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 0 & -39 & 828 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \end{array}\right) {-4}, {+39}, {-12} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \\ z = 11 \\ \lambda = -21 \end{cases}$$

Siis piste $\bar{x}_0 = (15, 9, 11)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2) Sidotun ääriarvon olemassaolo ja laatu

Laajennettu Hessin matriisi

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad |\bar{H}_i|, \; i = m+1, \dots, n$$

$$\Rightarrow i = 2, 3$$

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= -(-5-3) = 8$$

$$|\bar{H}_3| = |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\cdot(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 2 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -1\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} = -1(3+20) = -23$$

$(-1)^i\,|\bar{H}_i|$: $(-1)^2\,|\bar{H}_2| = (-1)^2\cdot 8 = 8 > 0$

$(-1)^3\,|\bar{H}_3| = (-1)^3\cdot(-23) = 23 > 0$

Nyt kohta i) toteutuu. Siis piste (15, 9, 11) on sidottu paikallinen maksimikohta.

Ainoana mahdollisena ääriarvokohtana ja maksimikohtana se on absoluuttinen maksimikohta ehdolla $x+y+z=35$

$f(15,9,11) = -15^2 - 2\cdot 9^2 - 11^2 + 15\cdot 9 + 11 = -362$

sidottu maksimiarvo

Vast. paikallinen ja absoluuttinen sidottu maksimi $f(15,9,11) = -362$, ei paikallisia eikä absoluuttisia minimejä

(13) $f(x,y,z) = x^2 + 2y - 2x - 10z - 3$ ehdot $2x+2y+2z=0$

$x = -2y - 3z$

ehtoyhtälöt $g_1(x,y,z) = 2x+2y+2z$

$g_2(x,y,z) = x+2y+3z$

muuttujat $n=3$ ja yhtälörajoitteet $m=2$

Lagrange-funktio

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g_1(x,y,z) - \lambda_2 g_2(x,y,z)$$
$$= x^2 + 2y - 2x - 10z - 3 - \lambda_1(2x+2y+2z) - \lambda_2(x+2y+3z)$$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_{\lambda_1} = 0 \\ L_{\lambda_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -10 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ -2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} +1 \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1 \\ \cdot\left(-\frac{1}{2}\right) \\ +1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) +1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ +2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} z = 8 \\ \lambda_1 = 13 \\ \lambda_2 = -12 \\ y = -16 \\ x = 8 \end{cases}$$

Siis piste $\bar{X}_0 = (8, -16, 8)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2) Sidotun ääriarvon olemassaolo ja laatu

Laajennettu Hessin matriisi

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$|\bar{H}_i|$, $i = m+1, \ldots, n$

$m = 2 \Rightarrow i = 3$
$n = 3$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot(-1)\cdot(-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4(6-4) = 8$$

$(-1)^i |\bar{H}_i| = (-1)^3 |\bar{H}_3| = -8 < 0$ kohta 1) ei toteudu

$(-1)^m |\bar{H}_i| = (-1)^2 |\bar{H}_3| = 8 > 0$ kohta 2) toteutuu

Piste $(8, -16, 8)$ on paikallinen sidottu minimikohta

$f(8,-16,8) = 8^2 + 2\cdot(-16) - 2\cdot 8 - 10\cdot 8 - 3 = -67$
sidottu minimiarvo

Vast. paikallinen ja absoluuttinen sidottu minimi $f(8,-16,8) = -67$, ei paikallista eikä absoluuttista sidottua maksimia