MPTT2, viikko 8

(14)

a) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ehdolla $x+y+z \leq 35$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöä

1° ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = -2x + y \\ f_y = -4y + x \\ f_z = -2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4y + x = 0 \\ -2z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2 \cdot 4y + y = 0 \\ x = 4y \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -7y = 0 \\ x = 4y \\ z = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Piste $\bar{x}_0 = (0, 0, \frac{1}{2})$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2° Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{x}_0$ $H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|H_1(\bar{x}_0)| = -2 \quad < 0$

$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 \quad > 0$

$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 7 = -14 \quad < 0$

$(-1)^1 |H_1(\bar{x}_0)| = 2 \quad > 0$
$(-1)^2 |H_2(\bar{x}_0)| = 7 \quad > 0$
$(-1)^3 |H_3(\bar{x}_0)| = 14 \quad > 0 \quad \Rightarrow \quad H(\bar{x}_0)$ on negatiividefiniitti

$\Rightarrow$ Piste $(0, 0, \frac{1}{2})$ on paikallinen maksimikohta ehtoalueen sisäpuolella, koska $0+0+\frac{1}{2} \leq 35$

Ainoana kriittisenä pisteenä ja maksimikohtana se on absoluuttinen maksimikohta ehtoalueen sisällä.

$f(0,0,\frac{1}{2}) = -0^2 - 2\cdot 0^2 - (\frac{1}{2})^2 + 0\cdot 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ absoluuttinen maksimiarvo

$$\lim_{\substack{x\to -\infty \\ y=0 \\ z=0}} (-x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z) = -\infty$$

$\Rightarrow$ ei absoluuttista minimiä

$\Downarrow$

$-\infty + 0 + 0 \leq 35$ eli ehto toteutuu!

3) Paikallinen ja absoluuttinen epäyhtälöehdon mukainen sidottu maksimi $f(0,0,\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$.
Ei paikallista tai absoluuttista minimiä.

b) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ehdolla $x+y+z \geq 35$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöehtoa

a)-kohta $\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (0, 0, \frac{1}{2})$ on ehtoalueen ulkopuolinen paikallinen maksimikohta.

2) Ääriarvotetaan funktio ehdolla $x+y+z = 35$

Tehtävä 12 $\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (15, 9, 11)$ on sidottu paikallinen maksimikohta.

Ainoana kriittisenä pisteenä ja maksimikohtana se on absoluuttinen maksimikohta ehtoalueen reunalla.

$f(15,9,11) = -362$ absoluuttinen sidottu maksimiarvo

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=0 \\ z=0}} (-x^2 - 2y^2 - z^2 - xy + z) = -\infty$$

$\rightarrow \infty + 0 + 0 \geq 35$ eli ehto toteutuu

$\Rightarrow$ ei absoluuttista minimiä.

3) Paikallinen ja absoluuttinen epäyhtälöehdon mukainen sidottu maksimi $f(15,9,11) = -362$
ei paikallista tai absoluuttista minimiä.

(15) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ ehdolla $xyz \geq 125$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöehtoa

1° Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = y+z \\ f_y = x+z \\ f_z = x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 \iff z=-x \\ x+y=0 \iff y=-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x-x=0 \\ z=-x \\ y=-x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

Piste $\bar{x}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta

2° Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$|H_1(\bar{x}_0)| = 0$

$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0-1 = -1 < 0$

$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{-1} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-1) = 2 > 0$

Testi ei kerro mitään, joten tutkitaan tarkemmin

$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y=1 \\ z=1}} (xy + xz + yz) = \infty \cdot 1 + \infty \cdot 1 + 1 \cdot 1 = \infty$ ei abs. max

$\infty \cdot 1 \cdot 1 \geq 125$ ehto toteutuu

$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y=-1 \\ z=-1}} (xy + xz + yz) = \infty \cdot (-1) + \infty \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = -\infty$

ei abs. min

$\infty \cdot (-1) \cdot (-1) \geq 125$ ehto toteutuu

16

Tuottaja	Kokonaistuotanto	Käyttäjä 1	Käyttäjä 2	Loppukysyntä
1	300	100	100	100
2	600	200	0	400

Kokonaistuotanto $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \end{pmatrix}$

kun loppukysyntä $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \end{pmatrix}$

Välituotteet x_{ij} ovat $x_{11} = 100$ $x_{12} = 100$
$x_{21} = 200$ $x_{22} = 0$

$\bar{x} = (I-A)^{-1} \bar{y}$

Muodostetaan teknillinen matriisi (kiinteät kertoimet)
$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ (Paljonko suhteessa omaan tuotantoonsa tarvitsee toisten alojen tuotantoa panoksina

$$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3} \qquad a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$$

$$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3} \qquad a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{0}{600} = 0$$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} \qquad I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$|I - A| = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{2}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2^{\backslash 2}}{18^{\backslash 9}} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 0$$

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} \ \exists$$

Määritetään käänteismatriisi kofaktoreiden avulla

$$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \qquad A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6} \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow K^T = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I - A)^{-1} = \frac{1}{|I - A|} K^T = \frac{1}{\frac{5}{9}} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{9}{30} \\ \frac{18}{15} & \frac{18}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

Tällöin panos-tuotos-malli on

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{x} = (I - A)^{-1} \bar{y} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Tarkistus:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \cdot 100 + \frac{3}{10} \cdot 400 \\ \frac{6}{5} \cdot 100 + \frac{6}{5} \cdot 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \end{pmatrix} \text{ OK}$$

Määrätään kokonaistuotannot x_j, kun loppukysyntä on $\bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} & \frac{3}{10} \\ \frac{6}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \cdot 100 + \frac{3}{10} \cdot 200 \\ \frac{6}{5} \cdot 100 + \frac{6}{5} \cdot 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$$

Siis tuottaja 1 tuottaa $x_1 = 240$ ja tuottaja 2 tuottaa $x_2 = 360$.