

# 806109 TILASTOTIETEEN PERUSMENETELMÄT I

## Harjoitus 1, viikko 3, kevät 2013

(Muut kuin taloustieteiden tiedekunnan opiskelijat)

### Summaoperaattorin $\Sigma$ käytöstä

Monien tilastollisten tunnuslukujen laskukaavoissa esiintyy mittaustulosten summia. Jotta välttäisiin pitkien summalausekkeiden kirjoittamiselta kaavoissa, on otettu käyttöön summaoperaattori  $\Sigma$  (iso sigma), joka määritellään seuraavasti:

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_{n-1} + x_n .$$

Jos  $x_1 = \dots = x_n = c =$  vakio, on siis

$$\sum_{i=1}^n c = c + c + \dots + c = n \cdot c .$$

Esimerkkejä:

$$\sum_{i=1}^5 x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$\sum_{i=5}^8 y_i = y_5 + y_6 + y_7 + y_8$$

$$\sum_{i=1}^5 3 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 5 \cdot 3 = 15$$

$$\sum_{i=4}^6 10 = 10 + 10 + 10 = 3 \cdot 10 = 30$$

$$\sum_{j=1}^3 j = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$\sum_{k=1}^4 k \cdot x_k = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

Merkinnällä  $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n x_{ij}$  tarkoitetaan summaa  $x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n}$   
 $+ x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + \dots$   
 $+ x_{m1} + x_{m2} + \dots + x_{mn}$

1. Olkoon  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = 4$ ,  $x_3 = 1$  ja  $x_4 = -2$  sekä  $y_1 = 5$ ,  $y_2 = 0$ ,  $y_3 = -2$  ja  $y_4 = 1$ . Laske seuraavien summien arvot.

a)  $\sum_{i=1}^4 x_i$     b)  $\sum_{i=1}^4 x_i^2$     c)  $(\sum_{i=1}^4 x_i)^2$     d)  $\sum_{i=1}^4 x_i y_i$     e)  $(\sum_{i=1}^4 x_i)(\sum_{i=1}^4 y_i)$

f)  $\sum_{i=1}^4 i$     g)  $\sum_{i=1}^4 (x_i + y_i)$     h)  $\sum_{i=1}^4 (i - 5)x_i$     i)  $\sum_{i=1}^4 x_i(y_i - 3)$

j)  $\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ , missä  $\bar{x}$  ja  $\bar{y}$  ovat  $x$ :n ja  $y$ :n keskiarvot,  $\bar{x} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 x_i$  ja  $\bar{y} = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^4 y_i$

2. Esitä  $\Sigma$ - merkkiä käyttäen

a)  $x_1 + x_2 + \dots + x_{100}$

b)  $1 + 2 + \dots + 100$

c)  $x_1 y_2 + x_2 y_3 + \dots + x_{n-1} y_n$

d)  $(x_1 + x_2 + \dots + x_{100})^2$

e)  $2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4$

f)  $6 + 6 + 6 + 6 + 6$

g)  $(x_1 - 1) + (2x_2 - 4) + (3x_3 - 9) + (4x_4 - 16)$

h)  $\frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_r x_r}{f_1 + f_2 + \dots + f_r}$

3. Todista (suoraan laskemalla) seuraavat summaoperaattorin ominaisuudet (a, b ja c mielivaltaisia reaaliavaloita).

$$\text{a) } \sum_{i=1}^n cx_i = c \sum_{i=1}^n x_i \qquad \text{b) } \sum_{i=1}^n (ax_i + by_i + c) = a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i + nc$$

$$\text{c) } \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i=1}^n y_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

4. Kahden muuttujan ( $x$  ja  $y$ ) arvoista kuudella havaintoyksiköllä on saatu seuraavat summat:

$$\sum_{i=1}^6 x_i = 24, \quad \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 118, \quad \sum_{i=1}^6 x_i y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^6 y_i = 6 \quad \text{ja} \quad \sum_{i=1}^6 y_i^2 = 64.$$

Käytä hyväksi tehtävässä 3 todistettuja summaoperaattorin ominaisuuksia ja laske

$$\text{a) } \sum_{i=1}^6 3x_i \qquad \text{b) } \sum_{i=1}^6 (2x_i - 5) \qquad \text{c) } \sum_{i=1}^6 (x_i + y_i) \qquad \text{d) } \sum_{i=1}^6 (x_i - y_i)^2$$

$$\text{e) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y}) \qquad \text{f) } \sum_{i=1}^6 (y_i - \bar{y})^2 \qquad \text{g) } \sum_{i=1}^6 (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

5. Tarkastellaan alla olevaa yksinkertaista taulukkoa, jossa on kaksi riviä ja viisi saraketta (ts.  $2 \times 5$ -taulukko). Merkinällä  $x_{ij}$  tarkoitetaan taulukon rivillä  $i$  sarakkeessa  $j$  olevaa lukua. Tässä tehtävässä siis esimerkiksi  $x_{24} = 28$ .

9	16	13	32	4
6	34	23	28	3

Laske annettujen tietojen perusteella seuraavien summien arvot.

$$\text{a) } \sum_{i=1}^2 x_{i3} \qquad \text{b) } \sum_{j=1}^5 x_{1j} \qquad \text{c) } \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 x_{ij}$$

6. Täydennetään seuraavaksi tehtävän 5 taulukkoa antamalla riveille ja sarakkeille otsikot. Taulukon luvut liittyvät kevään 2013 tilastotieteen perusmenetelmät I kurssille 10.1.2013 mennessä ilmoittautuneisiin opiskelijoihin, joita on kaikkiaan 168 kappaletta. Opiskelijan opintosuuntaa määriteltäessä luokkaan "Taloustiede" on laskettu mukaan kaikki taloustieteiden tiedekunnassa ensisijaisesti opiskelevat. Merkinällä  $x_{ij}$  tarkoitetaan edelleen taulukon rivillä  $i$  sarakkeessa  $j$  olevaa lukua.

**Taulukko:** Kevään 2013 tilastotieteen perusmenetelmät I kurssille 10.1.2013 mennessä ilmoittautuneet opiskelijat.

Sukuopuoli	Opiskelijan opintosuunta				
	Biokemia	Biologia	Maantiede	Taloustiede	Muu
Mies	9	16	13	32	4
Nainen	6	34	23	28	3

a) Mitä nyt tarkoittaa (eli miten tulkitset)

a1) luku  $x_{23}$ ?

a2) tehtävässä 5 a) esiintynyt summa  $\sum_{i=1}^2 x_{i3}$ ?

a3) tehtävässä 5 b) esiintynyt summa  $\sum_{j=1}^5 x_{1j}$ ?

a4) tehtävässä 5 c) esiintynyt summa  $\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^5 x_{ij}$ ?

b) Laske  $100 \cdot \frac{x_{23}}{\sum_{j=1}^5 x_{2j}}$ . Mitä laskun lopputulos tarkoittaa?

c) Laske  $100 \cdot \frac{x_{23}}{\sum_{i=1}^2 x_{i3}}$ . Mitä laskun lopputulos tarkoittaa?

7. Esitä summana  $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^2 \frac{(f_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$ .

**Vastauksia tehtäviin:**

1: a) 8 b) 46 c) 64 d) 21 e) 32 f) 10 g) 12 h) -32 i) -3 j) 13

4: a) 72 b) 18 c) 30 d) 150 e) 0 f) 58 g) -8

5: a) 36 b) 74 c) 168

**Huom.** Harjoitustehtävät löytyvät myös nettiosoitteesta  
<http://math.oulu.fi/materiaalit/harjoitukset/kevat13>

**Viikolla 4** pidettävien mikroluokkaharjoitusten harjoitusryhmät (enintään 17 opiskelijaa/ryhmä) on lueteltu alla. Ilmoittautuminen ko. harjoituksiin avautuu weboodissa keskiviikkona 16.1.2013.

maanantai klo 14.15 – 15.45  
tiistai klo 8.30 – 10.00  
tiistai klo 12.15 – 13.45  
keskiviikko klo 10.15 – 11.45  
keskiviikko klo 14.30 – 16.00  
torstai klo 8.30 – 10.00  
torstai klo 12.15 – 13.45

Biologeille varatut ryhmät:

maanantai klo 14.15 – 15.45  
tiistai klo 12.15 – 13.45  
perjantai klo 8.30 – 10.00