Lukuteoria ja ryhmät

Vihjeet 1 kevät 2014

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Mitkä seuraavista joukon $A \times A$ osajoukoista R_i, $i = 1, 2, 3$, ovat ekvivalenssirelaatioita:

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(1,1),(2,2),(1,2),(2,1),(3,3),(4,4)\}, \\ R_2 &= \{(1,1),(2,2),(2,4),(3,3),(3,4),(4,4)\}, \\ R_3 &= \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(4,4)\}? \end{aligned}$$

Jos R_i, $i = 1, 2, 3$, on ekvivalenssirelaatio, mitkä ovat ekvivalenssiluokat?

Vihje. Merkinnät ovat Määritelmästä 1.2 ja pitää katsoa toteutuuko Määritelmän 1.3 ehdot. Jos jokin kohta ei toteudu kysymyksessä ei ole ekvivalenssirelaatio. Ekvivalenssiluokkaan kuuluvat ne perusjoukon A alkiot, jotka ovat ekvivalenssiluokan määrääjän kanssa relaatiossa.

2. a) Määritellään reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ relaatio R seuraavasti:

$$xRy, \quad \text{jos} \quad x \geq y.$$

Onko R ekvivalenssirelaatio?

b) Määritellään reaalilukujen joukon $\mathbb{R}$ relaatio R asettamalla

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio. Määrää $[\sqrt{2}]$.

Vihje. a) Kokeile aluksi eri reaaliluvuilla pitääkö Määritelmän 1.3 ehdot paikkansa, jos jokin kohta ei pidä paikkaansa, niin olet saanut vastaesimerkin, joka kaataa ekvalenssirelaation.

b) Osoita, että Määritelmän 1.3 ehdot pitävät paikkansa. Luvun $\sqrt{2}$ määräämään ekvivalenssiluokkaan kuuluvat ne reaaliluvut, jotka ovat relaatiossa luvun $\sqrt{2}$ kanssa.

3. Määritellään kokonaislukujen joukon $\mathbb{Z}$ relaatio R seuraavasti:

a) aRb, jos $a \mid b$.

b) aRb, jos $a + b$ on parillinen.

c) aRb, jos $ab \geq 0$.

Onko R ekvivalenssirelaatio? Jos R on ekvivalenssirelaatio, mitkä ovat ekvivalenssiluokat?

Vihje. Kokeile aluksi eri kokonaisluvuilla pitävätkö Määritelmän 1.3 ehdot paikkansa, jos jokin kohta ei pidä paikkaansa, niin olet saanut vastaesimerkin, joka kaataa ekvalenssirelaation. Jos näyttää, että kaikki ehdot pitävät paikansa, niin todista, että näin on. Ekvivalenssiluokkien määräämisessä kannattaa ottaa aluksi jokin kokonaisluku ja määrittää sen määräämä ekvivalenssiluokka. Tämän jälkeen määritetään sellaiselle kokonaisluvulle ekvivalenssiluokka, joka ei vielä kuulu aikaisempaan ekvivalenssiluokkaan. Näin jatketaan, niin kauan, että jokainen kokonaisluku kuuluu johonkin ekvivalenssiluokkaan (ja vain yhteen).

4. a) Esitä luku 417_8 kymmenjärjestelmän lukuna.
   b) Esitä luku 417_8 binäärijärjestelmän lukuna.
   c) Esitä luku 123_{10} kahdeksanjärjestelmän lukuna.
   d) Esitä luku 1100011_2 kahdeksanjärjestelmän lukuna.

   Vihje. a) Kirjoita auki, mitä tämä merkintä tarkoittaa ja sievennä.
   b) Kirjoita auki, mitä tämä merkintä tarkoittaa ja sijoita $8 = 2^3$, jolloin saat esityksen luvun kaksi potenssien summana.
   c) Käytä jakoalgoritmia, kun jakaja on luku 8. Käytä jakoalkoritmia aina lukua 8 suurempiin lukuihin. Lopuksi poista sulut, niin esitys on halutussa muodossa.
   d) Kirjoita auki, mitä tämä merkintä tarkoittaa ja sijoita $2^3 = 8$ ja $2^2 = 4$.

5. Osoita Lauseen 2.2 avulla, että jokainen kokonaisluku on jotain seuraavista muodoista:
$$4q, \qquad 4q+1, \qquad 4q+2, \qquad 4q+3,$$
   missä $q \in \mathbb{Z}$.

   Vihje. Oleta, että a on mielivaltainen kokonaisluku. Käytä Lausetta 2.2 tapauksessa $b = 4$.

6. a) Osoita, että kahden muotoa $4k+1$ olevan kokonaisluvun tulo on myöskin muotoa $4k+1$.
   b) Osoita, että kahden muotoa $4k+3$ olevan kokonaisluvun tulo on muotoa $4k+1$.
   c) Osoita, että parittoman kokonaisluvun neliö on muotoa $8k+1$.

   Vihje. a) Ota kaksi muotoa $4k+1$ olevaa kokonaislukua (käytä eri kirjaimia k:n paikalla) ja kerro keskenään.
   b) Ota kaksi muotoa $4k+3$ olevaa kokonaislukua (käytä eri kirjaimia k:n paikalla) ja kerro keskenään.

c) Voit tutkia luvun $2m + 1$ toista potenssia, jolloin saat $4k + 1$ muotoa olevan luvun. Osoita vielä, että k:n paikalla oleva luku on parillinen. Toinen tapa on käyttää a)- ja b)-kohtaa apuna, sillä parittomat kokonaisluvut ovat joko muotoa $4k + 1$ tai muotoa $4k + 3$.

7. Olkoot a, b, c ja m kokonaislukuja.
   a) Oletetaan, että $a \mid b$ ja $b \mid c$. Osoita, että $a \mid c$.
   b) Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \mid b$. Osoita, että $c^2 \mid ab$.
   c) Oletetaan, että $a \mid b$ ja $b \mid a$. Osoita, että $b = a$ tai $b = -a$.
   d) Oletetaan, että $m \neq 0$ ja $ma \mid mb$. Osoita, että $a \mid b$.
   e) Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \nmid b$. Osoita, että $c \nmid (a + b)$.
   f) Jos c jakaa luvun ab, niin onko mahdollista, että $c \nmid a$ ja $c \nmid b$?

Vihje. a) Käytä oletuksiin Määritelmää 2.3.
b) Käytä oletuksiin Määritelmää 2.3.
c) Käytä oletuksiin Määritelmää 2.3 ja esitä luku b muodossa $b = mb$, $m \in \mathbb{Z}$.
d) Käytä oletukseen Määritelmää 2.3 ja mieti mitä yhtälölle saa tehdä ja mitä pitäisi tehdä, että saadaan väite.
e) Tee vastaoletus ja osoita, että saadaan ristiriita oletuksen $c \nmid b$ kanssa.
f) Ota kolme kokonaislukua a, b, c, joille pätee ehto $c \mid ab$. Jos et saa esimerkkiä aikaiseksi muuta lukuja (mieti miksi ei onnistu), niin kauan, että onnistuu.