Lukuteoria ja ryhmät

Vihjeet 3 kevät 2014

1. Esitä seuraavat kokonaisluvut alkulukujen tulona ja määrää näiden esitysten avulla lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava:
   a) 96 ja 525,
   b) 5040 ja 7700.

   Vihje. Tee alkulukuesitykset. Suurin yhteinen tekijä on yhteisten alkulukutekijöiden tulo (sama alkuluku voi olla mukana useamman kerran). Pienimmän yhteisen jaettavan laskemiseen voit käyttää apuna Lausetta 2.19.

2. Mitkä seuraavista kongruensseista ovat tosia?
   a) $111 \equiv -9 \pmod{40}$,
   b) $2 \equiv 99 \pmod{7}$,
   c) $630 \equiv 1 \pmod{37}$.

   Vihje. Katso kongruenssin määritelmä (kappaleen 2.3 alku). Toteuttaako kongruenssit määritelmän?

3. Olkoon $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $a \equiv b \pmod{m}$.
   a) Osoita, että $\text{syt}(a, m) = \text{syt}(b, m)$.
   b) Tiedetään, että $0 \leq |b - a| < m$. Osoita, että $a = b$.
   c) Olkoon n sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a \equiv b \pmod{n}$ ja $\text{syt}(m, n) = 1$. Osoita, että $a \equiv b \pmod{mn}$.

   Vihje. a) Merkitse $\text{syt}(b, m) = d$ ja osoita, että d toteuttaa Määritelmän 2.8 ehdot tapauksessa $\text{syt}(a, m)$.
   1° Käytä Lausetta 2.24 apuna (kongruenssi on ekvivalenssirelaatio).
   2° Käytä Lausetta 2.24 apuna.
   b) Laske kongruenssin määritelmän avulla, mitä on $|b - a|$ ja päättele loppu ehdon $0 \leq |b - a| < m$ avulla.
   c) Kongruenssin määritelmän ja Apulauseen 2.14 avulla pitäisi saada todistettua.

4. a) Määrää luvun 7^{2012} viimeinen numero.
   b) Mikä on jakojäännös, kun luku 3^{215} jaetaan luvulla 13.
   c) Osoita, että luku $7^{4n} + 9^{2n+1}$ päättyy aina samaan numeroon ($n = 0, 1, 2, \ldots$).
   d) Määrää luvun 4^{52} kaksi viimeistä numeroa.

Vihje. Käytä Lausetta 2.21 apuna. Aina, kun tarkastelet lukua a^n modulo m, laske a modulo m, a^2 modulo m jne.(edellistä voi käyttää seuraavan laskemiseen). Lopeta, silloin, kun saat itseisarvoltaan pienen luvun tai itseisarvo on a. Luvun a^n laskeminen pitäisi nyt onnistua.

a) Tarkastele lukua 7^{2012} modulo 10.
b) Tarkastele lukua 3^{215} modulo 13.
c) Tarkastele lukua $7^{4n} + 9^{2n+1}$ modulo 10.
d) Tarkastele lukua 4^{52} modulo 100. Toinen tapa on tarkastella lukua 4^{51} modulo 25 (+ Lause 2.22).

5. a) Osoita, että luku

$$L = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$

on jaollinen luvulla 7 jos ja vain jos luku

$$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 - 2 \cdot a_0$$

on jaollinen luvulla 7.

b) Osoita jaollisuussääntöjä käyttämällä, että luku 103257 on jaollinen luvuilla 3, 7, 9 ja 11.

Vihje. a) Mieti, mitä L:stä on hävinnyt väitteeseen verrattuna ja mitä on tullut tilalle. Käytä kongruensin laskusääntöjä (Lauseet 2.21, 2.22 ja 2.23), että pääset tilanteesta $7 \mid L \Leftrightarrow L \equiv 0 \pmod 7$ väitteeseen.

b) Muut menevät suoraan, mutta seitsemän jaollisuussääntöä joudut käyttämään monta kertaa peräkkäin.

6. a) Todista seuraava tulos:

Luonnollinen luku on jaollinen luvulla 4 jos ja vain jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen luvulla 4.

b) Osoita, että luku $L = 19175478641335$ ei ole minkään luonnollisen luvun neliö. (Vihje: Tarkastele luonnollisia lukuja ja niiden neliöitä modulo 4.)

Vihje. a) Esitä luonnollinen luku L jakoalgoritmin avulla, kun jakaja on 100. Lisäksi $4 \mid L \Leftrightarrow L \equiv 0 \pmod 4$.

b) Mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun luonnollinen luku n jaetaan neljällä? Tee näistä tapauksista kongruenssiesitykset ja laske niiden avulla, mitkä ovat mahdolliset jakojäännökset, kun luku n^2 jaetaan neljällä. Mitä on L modulo 4?