Lukuteoria ja ryhmät

Vihjeet 5 kevät 2014

1. Tutki, onko operaatio $(*)$ binäärinen seuraavissa tapauksissa:
   a) $a * b = \frac{a+b}{3}$ joukossa $\mathbb{Z}$, b) $a * b = a + \frac{ab}{7}$ joukossa $\mathbb{Q}$.

   Vihje. Määritelmä 4.1.1.

2. Tarkastellaan joukkoja $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ja $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sekä laskutoimituksia yhteenlasku $(+)$ ja kertolasku $(\cdot)$. Mitkä seuraavista pareista ovat ryhmiä:
   a) $(\mathbb{R}, +)$, b) $(\mathbb{R}_+, +)$, c) $(\mathbb{R}^*, +)$, d) $(\mathbb{R}, \cdot)$, e) $(\mathbb{R}_+, \cdot)$, f) $(\mathbb{R}^*, \cdot)$?

   Vihje. Määritelmä 4.1.3. Mieti ensin, mitkä näistä voisivat pitää paikkansa ja mitkä eivät. Jos pitää paikkansa, osoita neljä määritelmän kohtaa oikeaksi. Jos ei pidä paikkaansa, riittää osoittaa, että yksi kohta ei ole voimassa.

3. Olkoon $M = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ja $\det A \neq 0\}$. Osoita, että $(M, \cdot)$ on ryhmä, missä $(\cdot)$ on matriisien kertolasku. (Käytä lineaarialgebrasta tuttuja matriisien laskusääntöjä hyväksi todistamisessa.) Onko $(M, \cdot)$ Abelin ryhmä?

   Vihje. Määritelmä 4.1.3. Kertaa matriisien perusominaisuudet ja matriisien kertolasku sekä mieti, mitkä tutut alkiot ovat neutraalialkio ja käänteisalkio.

4. Olkoon G ryhmä, $a, b, c \in G$ ja e ryhmän G neutraalialkio. Osoita:
   a) Jos $(ab)^2 = a^2b^2$, niin $ab = ba$.
   b) Jos $abc = e$, niin myös $bca = e$.
   c) Jos $g^2 = e$ kaikilla $g \in G$, niin G on Abelin ryhmä.

   Vihje. Käytä hyväksi ryhmän ominaisuuksia (Määritelmä 4.1.3). Lausetta 4.1.5 voi myöskin käyttää apuna.

5. Olkoon $A = \{1, -1, i, -i\}$, missä $i^2 = -1$. Osoita, että $(A, \cdot)$ on ryhmä, kun tiedetään, että $(\cdot)$ on assosiatiivinen joukossa A. (Osoituksessa voit käyttää apuna 'ryhmätaulua'.)

   Vihje. Määritelmä 4.1.3. Tee 'ryhmätaulu' (ei ole ryhmätaulu ennen kuin on perusteltu ryhmäksi) ja perustele sen avulla ryhmäksi.

6. Kirjoita ryhmän ryhmätaulu ja määrää jokaisen alkion käänteisalkio:
a) $(\mathbb{Z}_7, +)$, b) $(\mathbb{Z}_{12}^*, \cdot)$, c) $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$.

Vihje. Katso luentomonisteen sivulta 22, miten jäännösluokilla lasketaan ja käytä taulujen täytössä hyväksi symmetriaa sekä negatiivisilla edustajilla laskemista varsinkin alkuluokkien tapauksissa.

7. Kuinka monta alkiota on ryhmässä $\mathbb{Z}_{980}^*$? Osoita, että $[39]$ on ryhmän $\mathbb{Z}_{980}^*$ alkio. Määrää alkion $[39]$ käänteisalkio ryhmässsä $\mathbb{Z}_{980}^*$.

Vihje. Määritelmät 3.2 ja 3.3. Muuta käänteisalkion määrääminen kongruenssiyhtälön ratkaisemiseksi.

8. Ratkaise ryhmässä $\mathbb{Z}_8$ yhtälöpari $$\begin{cases} x + x + [4] + y + y &= [0] \\ x + [2] + y &= [4] \end{cases}.$$

Vihje. Ratkaise alemmasta yhtälöstä y (perustele ryhmän ominaisuuksien avulla) ja sijoita ylempään.