Lukuteoria ja ryhmät

Vihjeet 7 kevät 2014

1. Ryhmällä $(\mathbb{Z}_{20}, +)$ on aliryhmä $H = \{[0], [4], [8], [12], [16]\}$. Määrää tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{20}/H$ ja muodosta sen ryhmätaulu, jos tekijäryhmä on olemassa.

   Vihje. Milloin tekijäryhmä on olemassa (Määritelmä 4.5.4)? Minkälaisilla ryhmillä on aina jokainen aliryhmä normaali (Määritelmän 4.5.1 jälkeinen huomautus)? Muuten samanlaista sivuluokilla laskentaa kuin edellisissä harjoituksissa.

2. Tarkastellaan ryhmää $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$. Määrää tekijäryhmä $\mathbb{Z}_{15}^*/\langle[4]\rangle$ ja muodosta sen ryhmätaulu, jos tekijäryhmä on olemassa.

   Vihje. Katso 1. tehtävän vihje.

3. Olkoon $G = \langle a \rangle$ kertalukua yhdeksän oleva syklinen ryhmä.
   a) Osoita, että $K = \{e, a^3, a^6\}$ on G:n normaali aliryhmä.
   b) Määrää tekijäryhmä G/K ja muodosta sen ryhmätaulu.

   Vihje. Katso 1. tehtävän vihje ja luentomonisteen sivun 28 alalaidan huomautus.

4. Koska $(\mathbb{R}, +)$ on Abelin ryhmä, sen aliryhmä $\mathbb{Z}$ on normaali ja tekijäryhmä $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ on siten olemassa.
   a) Tekijäryhmän alkiot voidaan lausua muodossa $q + \mathbb{Z}$, missä $q \in \mathbb{R}$, $0 \leq q < 1$. Lausu tässä muodossa alkiot $(\frac{1}{2} + \mathbb{Z}) + (\frac{2}{3} + \mathbb{Z})$ ja $(\frac{3}{4} + \mathbb{Z})^{-1}$.
   b) Mitkä ovat alkioiden $\frac{1}{3} + \mathbb{Z}$, $\frac{35}{99} + \mathbb{Z}$ ja $\sqrt{2} + \mathbb{Z}$ kertaluvut?

   Vihje. Normaalia sivuluokilla laskentaa. Pitää vain huomata, että $a + \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ aina, kun $a \in \mathbb{Z}$. Lause 4.4.3 kannattaa lukea ennen b)-kohtaa.

5. Olkoot G ryhmä ja H sen aliryhmä, jolle $|G|/|H| = 2$ (vasempien sivuluokkien lukumäärä). Osoita, että H on G:n normaali aliryhmä.

   Vihje. Määrää vasemmat ja oikeat sivuluokat aH ja Ha tapauksissa $a \in H$ ja $a \notin H$.

6. Olkoot G ryhmä ja $M \trianglelefteq G$ sekä $N \trianglelefteq G$.
   a) Osoita, että $M \cap N \trianglelefteq G$. (Edellisen harjoituksen 4. tehtävän a)-kohdan tietoa voi käyttää hyväksi.)
   b) Merkitään
   $$MN = \{mn \mid m \in M, n \in N\}.$$
   Osoita, että $MN \trianglelefteq G$.

   Vihje. Lue Lauseen 4.5.2 jälkeinen huomautus.
   a) Edellisen harjoituksen tehtävän 4 a) nojalla $M \cap N \leq G$. Normaalisuuden todistaminen menee vastaavalla tavalla kuin aliryhmäksi osoitus edellä mainitussa tehtävässä.
   b) Kommutatiivisuus ei ole voimassa. Joudut käyttäämään todistuksissa seuraavaa tietoa normaaleille aliryhmille: Koska $aN = Na$, kaikilla $a \in G$, niin jokaiselle $n \in N$ löytyy sellainen n^* (riippuu a:sta), että $an = n^*a$.

7. Olkoot α, β, $\gamma \in S_4$,
   $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ja $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.
   a) Määrää $\alpha \circ \beta$, $\beta \circ \alpha$, $\alpha \circ \gamma$ ja $\gamma \circ \alpha$.
   b) Määrää käänteisalkiot α^{-1}, β^{-1} ja γ^{-1}.
   c) Ratkaise yhtälö $\alpha \circ x = \gamma$.
   d) Määrää ryhmien $\langle \alpha \rangle$, $\langle \beta \rangle$ ja $\langle \gamma \rangle$ kertaluvut.

   Vihje. Kappale 4.6 luentomonisteesta ja luentojen esimerkit. Lisäksi tarvitset aikaisempia tietoja ryhmistä.

8. Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_3. Merkitään
   $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,
   $\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   a) Tutki ovatko joukot $H_1 = \{e, \sigma_4\}$ ja $H_2 = \{e, \sigma_1, \sigma_2\}$ ryhmän S_3 normaaleja aliryhmiä.
   b) Muodosta normaalin aliryhmän tapauksessa tekijäryhmä ja sen ryhmätaulu.

   Vihje. Katso tehtävän 7 vihje. Normaalisuuden osoittamisessa tarkastele, ovatko vasemmat ja oikeat sivuluokat samat.