

Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 1 kevät 2014

1. Olkoon $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Mitkä seuraavista joukon $A \times A$ osajoukoista R_i , $i = 1, 2, 3$, ovat ekvivalenssirelaatioita:

$$R_1 = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (3, 3), (4, 4)\},$$

$$R_2 = \{(1, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)\},$$

$$R_3 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (4, 4)\}?$$

Jos R_i , $i = 1, 2, 3$, on ekvivalenssirelaatio, mitkä ovat ekvivalenssiluokat?

2. a) Määritellään reaalilukujen joukon \mathbb{R} relaatio R seuraavasti:

$$xRy, \quad \text{jos } x \geq y.$$

Onko R ekvivalenssirelaatio?

- b) Määritellään reaalilukujen joukon \mathbb{R} relaatio R asettamalla

$$xRy \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Osoita, että R on ekvivalenssirelaatio. Määrää $[\sqrt{2}]$.

3. Määritellään kokonaislukujen joukon \mathbb{Z} relaatio R seuraavasti:

- a) aRb , jos $a \mid b$.
- b) aRb , jos $a + b$ on parillinen.
- c) aRb , jos $ab \geq 0$.

Onko R ekvivalenssirelaatio? Jos R on ekvivalenssirelaatio, mitkä ovat ekvivalenssiluokat?

4. a) Esitä luku 417_8 kymmenjärjestelmän lukuna.
b) Esitä luku 417_8 binäärijärjestelmän lukuna.
c) Esitä luku 123_{10} kahdeksanjärjestelmän lukuna.
d) Esitä luku 1100011_2 kahdeksanjärjestelmän lukuna.

5. Osoita Lauseen 2.2 avulla, että jokainen kokonaisluku on jotain seuraavista muodoista:

$$4q, \quad 4q + 1, \quad 4q + 2, \quad 4q + 3,$$

missä $q \in \mathbb{Z}$.

6. a) Osoita, että kahden muotoa $4k + 1$ olevan kokonaisluvun tulo on myöskin muotoa $4k + 1$.
- b) Osoita, että kahden muotoa $4k + 3$ olevan kokonaisluvun tulo on muotoa $4k + 1$.
- c) Osoita, että parittoman kokonaisluvun neliö on muotoa $8k + 1$.
7. Olkoot a, b, c ja m kokonaislukuja.
- a) Oletetaan, että $a \mid b$ ja $b \mid c$. Osoita, että $a \mid c$.
- b) Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \mid b$. Osoita, että $c^2 \mid ab$.
- c) Oletetaan, että $a \mid b$ ja $b \mid a$. Osoita, että $b = a$ tai $b = -a$.
- d) Oletetaan, että $m \neq 0$ ja $ma \mid mb$. Osoita, että $a \mid b$.
- e) Oletetaan, että $c \mid a$ ja $c \nmid b$. Osoita, että $c \nmid (a + b)$.
- f) Jos c jakaa luvun ab , niin onko mahdollista, että $c \nmid a$ ja $c \nmid b$?