

Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 2 kevät 2014

1. Määrää kaikki lukua 110 pienemmät alkuluvut.
2. a) Osoita, että jokainen alkuluku $p > 3$ on muotoa $6n \pm 1$, missä $n \in \mathbb{Z}_+$.
b) Onko lukujen 3, 5 ja 7 lisäksi olemassa muita sellaisia kokonaisluku-kolmikoita $p, p + 2, p + 4$, että jokainen näistä kolmesta luvusta on alkuluku?
3. Olkoot $n \geq 3$ ja $n^2 + 2$ alkuluku. Osoita, että $3 \mid n$.
4. Määrää Eukleideen algoritmilla suurin yhteinen tekijä seuraaville luvuille ja esitä se näiden kokonaislukujen lineaarikombinaationa:
a) 478 ja 212,
b) 201 ja 1024.
Esitä luku 3 lukujen 201 ja 1024 lineaarikombinaationa (käytä b-kohtaa apuna).
5. a) Olkoot a ja b kokonaislukuja. Oletetaan, että on olemassa sellaiset kokonaisluvut x ja y , että $ax + by = 1$. Osoita, että $\text{syta}, b) = 1$.
b) Onko olemassa sellaisia kokonaislukuja r ja s , että $1841r + 3647s = 1$?
6. Oletetaan, että $k \in \mathbb{Z}_+$. Osoita, että luvut $3k + 2$ ja $5k + 3$ ovat suhteellisia alkulukuja.
7. Olkoot a ja b kokonaislukuja, joista ainakin toinen on nollasta eroava.
a) Olkoot $\text{syta}, b) = 1$ sekä c ja d sellaisia kokonaislukuja, että $c \mid a$ ja $d \mid b$. Osoita, että $\text{sytc}, d) = 1$.
b) Olkoot $\text{syta}, b) = 1$ ja kokonaisluku c sellainen, että $a \mid c$ ja $b \mid c$. Osoita, että $ab \mid c$.
c) Olkoon m positiivinen kokonaisluku. Osoita, että $\text{syta}, b) = m \text{syta}, mb)$.