Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 3 kevät 2014

1. Esitä seuraavat kokonaisluvut alkulukujen tulona ja määrää näiden esitysten avulla lukujen suurin yhteinen tekijä ja pienin yhteinen jaettava:
   a) 96 ja 525,
   b) 5040 ja 7700.

2. Mitkä seuraavista kongruensseista ovat tosia?
   a) $111 \equiv -9 \pmod{40}$,
   b) $2 \equiv 99 \pmod{7}$,
   c) $630 \equiv 1 \pmod{37}$.

3. Olkoon $a, b \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_+$ ja $a \equiv b \pmod{m}$.
   a) Osoita, että $\mathrm{syt}(a, m) = \mathrm{syt}(b, m)$.
   b) Tiedetään, että $0 \leq |b - a| < m$. Osoita, että $a = b$.
   c) Olkoon n sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a \equiv b \pmod{n}$ ja $\mathrm{syt}(m, n) = 1$. Osoita, että $a \equiv b \pmod{mn}$.

4. a) Määrää luvun 7^{2012} viimeinen numero.
   b) Mikä on jakojäännös, kun luku 3^{215} jaetaan luvulla 13.
   c) Osoita, että luku $7^{4n} + 9^{2n+1}$ päättyy aina samaan numeroon ($n = 0, 1, 2, \ldots$).
   d) Määrää luvun 4^{52} kaksi viimeistä numeroa.

5. a) Osoita, että luku
   $$L = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0$$
   on jaollinen luvulla 7 jos ja vain jos luku
   $$a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + \ldots + a_1 - 2 \cdot a_0$$
   on jaollinen luvulla 7.
   b) Osoita jaollisuussääntöjä käyttämällä, että luku 103257 on jaollinen luvuilla 3, 7, 9 ja 11.

6. a) Todista seuraava tulos:
   Luonnollinen luku on jaollinen luvulla 4 jos ja vain jos sen kahden viimeisen numeron muodostama luku on jaollinen luvulla 4.
   b) Osoita, että luku $L = 19175478641335$ ei ole minkään luonnollisen luvun neliö. (Vihje: Tarkastele luonnollisia lukuja ja niiden neliöitä modulo 4.)