

## Lukuteoria ja ryhmät

### Harjoitus 6 kevät 2014

- Osoita, että  $\mathbb{Q}$  (rationaaliluvut) on ryhmän  $(\mathbb{R}, +)$  aliryhmä.
  - Osoita, että  $\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  on ryhmän  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$  aliryhmä.
- Ovatko  $H_1 = \{[0], [4]\}$  ja  $H_2 = \{[0], [3], [6]\}$  ryhmän  $(\mathbb{Z}_8, +)$  aliryhmiä?
  - Määrää edellä oleville aliryhmille vasemmat sivuluokat.
- Ota esille edellisessä harjoituksessa tehty ryhmän  $(\mathbb{Z}_{14}^*, \cdot)$  ryhmätaulu.
  - Onko  $H_1 = \{[1], [5], [11]\}$  ryhmän  $\mathbb{Z}_{14}^*$  aliryhmä?
  - Osoita, että  $H_2 = \{[1], [9], [11]\}$  on ryhmän  $\mathbb{Z}_{14}^*$  aliryhmä.
  - Määrää aliryhmän  $H_2$  vasemmat sivuluokat.
- Olkkoon  $G$  ryhmä sekä  $H$  ja  $K$  ryhmän  $G$  aliryhmiä.
  - Osoita,  $H \cap K$  on ryhmän  $G$  aliryhmä.
  - Onko  $H \cap K$  ryhmien  $H$  ja  $K$  aliryhmä?
  - Tiedetään, että  $|K| = 40$  ja  $|H| = 33$ . Mitä voit sanoa aliryhmän  $H \cap K$  kertaluvusta ja itse aliryhmästä  $H \cap K$ ?
- Olkkoon  $G$  Abelin ryhmä. Olkkoot  $H \leq G$  ja  $K \leq G$ . Merkitään

$$HK = \{ab \mid a \in H, b \in K\}.$$

Osoita, että  $HK \leq G$ .

- Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$  alkioiden generoimat sykliset ryhmät.
  - Onko  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$  syklinen?
  - Mitkä ovat ryhmän  $(\mathbb{Z}_{18}^*, \cdot)$  aliryhmät?
  - Määrää kertalukua 6 olevan syklisen ryhmän  $G = \langle a \rangle$  kaikki aliryhmät.
- Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  alkioiden generoimat sykliset ryhmät.
  - Onko ryhmä  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  syklinen?
  - Määrää ryhmän  $(\mathbb{Z}_{15}^*, \cdot)$  kaikki aliryhmät.
- Osoita, että ryhmä  $(\mathbb{Z}, +)$  on syklinen.
  - Osoita, että syklisen ryhmän  $(\mathbb{Z}_m, +)$  generoi mikä tahansa alkio  $[a]$ , jolle  $\text{syt}(a, m) = 1$ . (Vihje: Käytä Lausetta 2.30.)