Lukuteoria ja ryhmät

Harjoitus 8 kevät 2014

1. Olkoot G Abelin ryhmä ja $f\colon G \to G$, $f(a) = (a^{-1})^2$.
   a) Osoita, että f on ryhmähomomorfismi.
   b) Olkoon $G = \mathbb{Z}_{14}^*$. Määrää $\mathrm{Im}(f)$ ja $\mathrm{Ker}(f)$. (Voit käyttää apuna harjoituksen 5 tehtävää 6c).)
   c) Muodosta tekijäryhmä $G/\mathrm{Ker}(f)$ ja esitä sen ryhmätaulu.

2. Osoita, että ryhmähomomorfismi $f\colon G \to G'$ on injektio jos ja vain jos $\mathrm{Ker}(f) = \{e_G\}$.

3. Olkoon G kertalukua m oleva syklinen ryhmä. Osoita, että G on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_m,+)$ kanssa.

4. Onko ryhmä $(\mathbb{Z}_4, +)$ isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}_m^*, \cdot)$ kanssa, kun
   a) $m = 9$, b) $m = 5$, c) $m = 8$?

5. Olkoot $f\colon G \to G'$ ja $g\colon G' \to G''$ ryhmähomomorfismeja.
   a) Osoita, että $g \circ f\colon G \to G''$ on homomorfismi.
   b) Olkoot f ja g isomorfismeja. Osoita, että $g \circ f$ on isomorfismi.

6. Olkoon $f\colon G \to G'$ ryhmäisomorfismi. Osoita, että $f^{-1}\colon G' \to G$ on isomorfismi.

7. Osoita, että ryhmien välinen isomorfia on ekvivalenssirelaatio missä tahansa ryhmistä muodostuvassa joukossa. (Käytä apuna kahden edellisen tehtävän tuloksia.)

8. Kuvaus $f\colon (\mathbb{Z}_{32}^*) \to (\mathbb{Z}_{32}^*)$, $f(a) = a^2$, on ryhmähomomorfismi. Osoita, että $(\mathbb{Z}_{32}^*/\mathrm{Ker}(f), \cdot) \cong (\mathbb{Z}_4, +)$.

9. Olkoot $M = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A \neq 0\}$
   ja $N = \{A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ ja } \det A = 1\}$.
   Harjoituksen 5 perusteella tiedetään, että $(M, \cdot)$ ja $(\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ ovat ryhmiä. Osoita, että $(N, \cdot) \trianglelefteq (M, \cdot)$ ja $(M/N, \cdot) \cong (\mathbb{R}^*, \cdot)$. (Vihje: Etsi sellainen homomorfismi $f\colon M \to \mathbb{R}^*$, jolle $\mathrm{Ker}(f) = N$ ja $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^*$.)