# Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitus 1, kevät 2014

1. a) $(a_n) = (3n-1)$

   Jono $(a_n)$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(a_n) = (3n-1) = 2, 5, 8, \ldots$$

   Yleinen termi on muotoa $a_n = 3n - 1$.

   Suppeneeko vai hajaantuuko jono $(a_n)$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (3n-1) = \infty$$

   Koska $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, jono $(a_n)$ hajaantuu.

   Onko lukujono $(a_n)$ aritmeettinen?

$$a_{n+1} - a_n = 3 \cdot (n+1) - 1 - (3n-1) = 3n + 3 - 1 - 3n + 1 = 3 = d$$

   Koska erotus $a_{n+1} - a_n = d$ on vakio aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$, on lukujono $(a_n)$ aritmeettinen.

   b) $(a_n) = \left(\dfrac{2}{3^n}\right)$

   Jono $(a_n)$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(a_n) = \left(\frac{2}{3^n}\right) = \frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \ldots = \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

   Yleinen termi on muotoa $a_n = \dfrac{2}{3^n} = 2\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

   Suppeneeko vai hajaantuuko jono $(a_n)$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, niin lukujono $(a_n)$ suppenee kohti lukua 0.

Onko lukujono $(a_n)$ geometrinen?

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1-n} = \frac{1}{3}$$

Koska osamäärä $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$ on vakio aina, kun $n \in \mathbb{N}_+$, on lukujono $(a_n)$ geometrinen.

c) $(a_n) = \left(\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$

Jono $(a_n)$ voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(a_n) = \left(\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4}, \frac{1}{4\cdot 5}, \ldots$$

Yleinen termi on muotoa $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

Suppeneeko vai hajaantuuko jono $(a_n)$?

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 0$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, niin lukujono $(a_n)$ suppenee kohti lukua 0.

Onko lukujono $(a_n)$ aritmeettinen?

$$\begin{aligned} a_2 - a_1 &= \frac{1}{12} - \frac{1}{6} = -\frac{1}{12} \\ a_3 - a_2 &= \frac{1}{20} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{30} \\ \Rightarrow \quad a_2 - a_1 &\neq a_3 - a_2 \end{aligned}$$

Koska erotus $a_{n+1} - a_n$ ei ole aina vakio, kun $n \in \mathbb{N}_+$, ei lukujono $(a_n)$ ole aritmeettinen.

Onko lukujono $(a_n)$ geometrinen?

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} &= \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \\ \frac{a_3}{a_2} &= \frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{12}} = \frac{3}{5} \\ \Rightarrow \quad \frac{a_2}{a_1} &\neq \frac{a_3}{a_2} \end{aligned}$$

Koska osamäärä $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ei ole aina vakio, kun $n \in \mathbb{N}_+$, ei lukujono $(a_n)$ ole geometrinen.

2. a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (3k-1) = 2 + 5 + 8 + \ldots$

Koska jono $(a_n) = (3n-1)$ on aritmeettinen, on myös sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (3k-1)$ aritmeettinen.

Aritmeettisen sarjan osasumma

$$\begin{aligned} S_n &= 2 + 5 + 8 + 11 + \ldots + (3n-1) \\ &= n \cdot \frac{a_1 + a_n}{2} = n \cdot \frac{2 + (3n-1)}{2} = n \cdot \frac{3n+1}{2} \end{aligned}$$

Sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (3k-1)$ hajaantuu, koska $\lim\limits_{k \to \infty} a_k = \infty$. (Aritmeettinen sarja hajaantuu aina.)

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3^k}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \ldots = 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \ldots\right)$

Koska jono $(a_n) = 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ on geometrinen, on myös sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2\left(\frac{1}{3}\right)^k$ geometrinen.

Geometrisen sarjan osasumma

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}(1-(\frac{1}{3})^n)}{\frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3^n}\right) = 1$$

Koska $|q| < 1$, niin geometrisen sarjan summa voidaan laskea myös seuraavasti

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = 1$$

Koska $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$ (äärellinen), on sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3^k}\right)$ suppeneva ja luku 1 sen summa. Geometrinen sarja suppenee silloin ja vain silloin, kun $|q| < 1$ eli $-1 < q < 1$.

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{4\cdot 5} + \dots$

Nyt sarja $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ ei ole aritmeettinen eikä geometrinen, koska jono $(a_n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$ ei ole aritmeettinen eikä geometrinen.

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = 0$$

Koska sarjan yleinen termi suppenee, voi myös sarja supeta.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{k-k+2-1}{(k+1)(k+2)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)(k+2)}\right)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\\
&= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \dots\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Sarjan summasta ainoa termi, joka ei kumoudu, on $\frac{1}{2}$, joten sarjan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ summa on $\frac{1}{2}$.

3. (a) $A+B$ ei ole määritelty, sillä $A$ on $2\times 3$ -matriisi ja $B$ on $3\times 2$ -matriisi.

(b)

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2\cdot 2 + 1\cdot 0 + 3\cdot(-3) & -2\cdot(-1) + 1\cdot 6 + 3\cdot 1 \\ 4\cdot 2 + 0\cdot 0 + 1\cdot(-3) & 4\cdot(-1) + 0\cdot 6 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4-9 & 2+6+3 \\ 8-3 & -4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 & 11 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(c)

$$
\begin{aligned}
BA &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\cdot(-2) + (-1)\cdot 4 & 2\cdot 1 + (-1)\cdot 0 & 2\cdot 3 + (-1)\cdot 1 \\ 0\cdot(-2) + 6\cdot 4 & 0\cdot 1 + 6\cdot 0 & 0\cdot 3 + 6\cdot 1 \\ -3\cdot(-2) + 1\cdot 4 & -3\cdot 1 + 1\cdot 0 & -3\cdot 3 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4-4 & 2 & 6-1 \\ 24 & 0 & 6 \\ 6+4 & -3 & -9+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 5 \\ 24 & 0 & 6 \\ 10 & -3 & -8 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

(d) $A^2$ ei ole määritelty, sillä $2\times 3$ -matriisia ei voi kertoa itsellään.

(e)

$$
A^T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}
$$

(f)

$$
A^T - B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 6 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2 & 4-(-1) \\ 1-0 & 0-6 \\ 3-(-3) & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ 1 & -6 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}
$$

(g)

$$3A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 1 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 3 & 9 \\ 12 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

4. (a)

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot 5 - (-2) \cdot 4 = 15 + 8 = 23$$

(b) Kehitetään determinantti toisen pystyrivin suhteen:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 7 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 2 - (-1) \cdot 3) = 3 \cdot (4 + 3) = 21$$

(f) Determinanttia ei ole määritelty, sillä vastaava matriisi ei ole neliömatriisi.