MPTT 2, viikko 11

(18.)

Tuottaja	Kokonaistuotanto	Käyttäjä 1	Käyttäjä 2	Loppukysyntä
1	300	100	100	100
2	600	200	0	400

Kokonaistuotanto $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 600 \end{pmatrix}$,

kun loppukysyntä $\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 400 \end{pmatrix}$

Välituotteet x_{ij}: $x_{11} = 100$ $x_{12} = 100$
$x_{21} = 200$ $x_{22} = 0$

$\bar{x} = (I - A)^{-1} \bar{y}$

Muodostetaan teknillinen matriisi:
$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$

$a_{11} = \frac{x_{11}}{x_1} = \frac{100}{300} = \frac{1}{3}$ $a_{12} = \frac{x_{12}}{x_2} = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$

$a_{21} = \frac{x_{21}}{x_1} = \frac{200}{300} = \frac{2}{3}$ $a_{22} = \frac{x_{22}}{x_2} = \frac{0}{600} = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix}$ $I - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 2/3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -2/3 & 1 \end{pmatrix}$

$|I - A| = \begin{vmatrix} 2/3 & -1/6 \\ -2/3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3} - \frac{2^{(2}}{18}{}^{3/} = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6}{9} - \frac{1}{9} = \frac{5}{9} \neq 0$

$\Rightarrow (I - A)^{-1} \; \exists$

Määritetään käänteismatriisi kofaktoreiden avulla

$K = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$, $A_{ij} = (-1)^{i+j} |M_{ij}|$

$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 1 = 1$
$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot (-2/3) = 2/3$
$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-1/6) = 1/6$
$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot (2/3) = 2/3$

$K = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 \\ 1/6 & 2/3 \end{pmatrix} \Rightarrow K^T = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$(I-A)^{-1} = \frac{1}{|I-A|} K^T = \frac{1}{5/9} \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix} = \frac{9}{5} \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 9/5 & 3/10 \\ 6/5 & 6/5 \end{pmatrix}$

Tällöin panos-tuotos-malli on:

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \bar{x} = (I-A)^{-1} \bar{y} = \begin{pmatrix} 9/5 & 3/10 \\ 6/5 & 6/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

Määrätään kokonaistuotannot x_j, kun loppukysyntä on $\bar{y} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$

$\bar{x} = \begin{pmatrix} 9/5 & 3/10 \\ 6/5 & 6/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9/5 \cdot 100 + 3/10 \cdot 200 \\ 6/5 \cdot 100 + 6/5 \cdot 200 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} \frac{900}{5} + \frac{600}{10} \\ \frac{600}{5} + \frac{1200}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1800+600}{10} \\ \frac{1800}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 240 \\ 360 \end{pmatrix}$

21. $f(x,y) = 45x + 55y$ rajoitteilla $\begin{cases} 6x+4y \le 120 \\ 3x+10y \le 180 \\ x, y \ge 0 \end{cases}$

suljettu alue.

Muutetaan rajoite-epäyhtälöt lisämuuttujien z ja w avulla yhtälöiksi:

$$\begin{cases} 6x+4y+z = 120 \\ 3x+10y+w = 180 \\ x, y, z, w \ge 0 \end{cases}$$

Alkuperäisiä muuttujia 2 kpl ⇒ asetetaan 2 muuttujaa nollaksi.

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=120 \\ w=180 \end{cases}$ (0, 0, 120, 180)

$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=30 \\ w=-120 \end{cases}$ (0, 30, 0, −120)

$\begin{cases} x=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=48 \\ y=18 \end{cases}$ (0, 18, 48, 0)

$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ w=120 \end{cases}$ (20, 0, 0, 120)

$\begin{cases} y=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-240 \\ x=60 \end{cases}$ (60, 0, −240, 0)

$\begin{cases} z=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+4y=0 \\ 3x+10y=0 \end{cases} \overset{\text{Teht. 20}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases}$ (10, 15, 0, 0)

Otetaan huomioon positiivisuusehdot, jolloin saadaan hyväksytyt kantaratkaisut:

(0, 0, 120, 180) $45 \cdot 0 + 55 \cdot 0 = 0$ pienin
(0, 18, 48, 0) $45 \cdot 0 + 55 \cdot 18 = 990$
(20, 0, 0, 120) $45 \cdot 20 + 55 \cdot 0 = 900$
(10, 15, 0, 0) $45 \cdot 10 + 15 \cdot 55 = 1275$ suurin

Vast. Absoluuttinen maksimi $f(10,15)=1275$
Absoluuttinen minimi $f(0,0)=0$

(22.) Kantaratkaisumenetelmällä

$f(x,y) = 45x + 55y$ rajoitteilla $\begin{cases} 6x+4y \geq 120 \\ 3x+10y \geq 180 \\ x,y \geq 0 \end{cases}$

avoin alue.
Kun ratkaistiin tehtävä 22 ratkaisumonikulmion avulla, huomattiin, että funktio f on kasvava sekä muuttujan x että muuttujan y suhteen.
Lisäksi $\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=1}} f(x) = \infty$, joten absoluuttista maksimia ei ole.
Etsitään minimi kantaratkaisumenetelmän avulla.

Muutetaan rajoite-epäyhtälöt lisämuuttujien z ja w avulla yhtälöiksi

$\begin{cases} 6x+4y-z=120 \\ 3x+10y-w=180 \\ x,y,z,w \geq 0 \end{cases}$ Alkuperäisiä muuttujia 2, asetetaan 2 muuttujaa nollaksi

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-120 \\ w=-180 \end{cases}$ $(0,0,-120,-180)$

$\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=30 \\ w=120 \end{cases}$ $(0,30,0,120)$

$\begin{cases} x=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-48 \\ y=18 \end{cases}$ $(0,18,-48,0)$

$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=20 \\ w=-120 \end{cases}$ $(20,0,0,-120)$

$\begin{cases} y=0 \\ w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=240 \\ x=60 \end{cases}$ $(60, 0, 240, 0)$

$\begin{cases} z=0 \\ w=0 \end{cases} \overset{\text{Tent 20}}{\Rightarrow} \begin{cases} x=10 \\ y=15 \end{cases}$ $(10, 15, 0, 0)$

Hyväksytyt kantaratkaisut	$f(x,y)=45x+55y$
$(0,30,0,120)$	$45 \cdot 0 + 55 \cdot 30 = 1650$
$(60,0,240,0)$	$45 \cdot 60 + 55 \cdot 0 = 2700$
$(10,15,0,0)$	$45 \cdot 10 + 55 \cdot 15 = 1275$ Pienin

V: abs. min $f(10,15) = 1275$,
ei abs. max.