Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitusten malliratkaisut, viikko 13, kevät 2014

27. c) Valitaan $f'(x) = (-x+2)^5$ ja $g(x) = x$. Tällöin $f(x) = -\frac{1}{6}(-x+2)^6$ ja $g'(x) = 1$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}\int x(-x+2)^5 dx &= -\frac{1}{6}(-x+2)^6 \cdot x - \int -\frac{1}{6}(-x+2)^6 dx \\ &= -\frac{1}{6}(-x+2)^6 x - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{7}(-x+2)^7 + c \\ &= -\frac{1}{6}(-x+2)^6(x - \frac{1}{7}x + \frac{2}{7}) + c \\ &= -\frac{1}{42}(-x+2)^6(6x+2) + c.\end{aligned}$$

d) Jotta integroitava lauseke on määritelty, on oltava $x > 0$. Valitaan $f'(x) = \frac{1}{x}$ ja $g(x) = \ln x$. Tällöin $f(x) = \ln|x| \overset{x>0}{=} \ln x$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$\int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \ln x \cdot \ln x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx.$$

Tästä saadaan ratkaistua

$$\begin{aligned} & 2\int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = (\ln x)^2 \\ \Leftrightarrow \quad & \int \ln x \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + c.\end{aligned}$$

28. a) Jaetaan ensin integroitavan lausekkeen nimittäjä tekijöihin.

Tapa 1: Huomataan, että $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Tapa 2: Polynomin $p(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ mahdolliset rationaaliset nollakohdat ovat ± 1. Nyt $p(1) = 0$, joten $x - 1$ on polynomin $p(x)$ tekijä. Jakokulmassa laskemalla saadaan, että

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x^2 - 2x + 1).$$

Koska $(x-1)^2 = x^2 - 2x - 1$, niin

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)(x^2 - 2x + 1) = (x-1)^3.$$

Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{x^2}{(x-1)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain termillä $(x-1)^3$ saadaan

$$\begin{aligned} x^2 &= A(x-1)^2 + B(x-1) + C = A(x^2 - 2x + 1) + B(x-1) + C \\ &= Ax^2 - 2Ax + A + Bx - B + C = Ax^2 + (B - 2A)x + (A - B + C). \end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella olevien polynomien kertoimia saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{aligned} &\begin{cases} A = 1 \\ B - 2A = 0 \\ A - B + C = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \quad & B = 2A = 2 \\ \Rightarrow \quad & C = B - A = 2 - 1 = 1. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3},$$

joten

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} dx &= \int \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^3} dx \\ &= \int \frac{1}{x-1} + 2(x-1)^{-2} + (x-1)^{-3} dx \\ &= \ln|x-1| + 2 \cdot \frac{(x-1)^{-1}}{-1} + \frac{(x-1)^{-2}}{-2} + c \\ &= \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + c. \end{aligned}$$

b) Jaetaan ensin integroitavan lausekkeen nimittäjä tekijöihin. Laskemalla nähdään, että $(x^2+1)^2 = x^4 + 2x^2 + 1$, joten

$$x^5 + 2x^3 + x = x(x^4 + 2x^2 + 1) = x(x^2+1)^2.$$

Koska polynomilla $x^2 + 1$ ei ole nollakohtia, se ei jakaudu ensimmäisen asteen tekijöihin.

Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain termillä $x(x^2+1)^2$ saadaan

$$\begin{aligned}
1 &= A(x^2+1)^2 + (Bx + C)x(x^2+1) + (Dx+E)x \\
&= A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx + C)(x^3 + x) + (Dx^2 + Ex) \\
&= Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + Ex \\
&= (A+B)x^4 + Cx^3 + (2A + B + D)x^2 + (C+E)x + A.
\end{aligned}$$

Vertaamalla yhtälön vasemmalla ja oikealla puolella olevien polynomien kertoimia saadaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases}
A + B = 0 \\
C = 0 \\
2A + B + D = 0 \\
C + E = 0 \\
A = 1
\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad B = -A = -1 \\
&\Rightarrow \quad D = -B - 2A = 1 - 2 = -1 \\
&\Rightarrow \quad E = -C = 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{1}{x^5 + 2x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2},$$

joten

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^5+2x^3+x}dx &= \int \frac{1}{x} + \frac{-x}{x^2+1} + \frac{-x}{(x^2+1)^2}dx \\
&= \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx - \frac{1}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}dx \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+1)^{-1}}{-1} + c \\
&= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + c.
\end{aligned}
$$

29. a) Käytetään sijoitusta $t = \sqrt[3]{x+3}$, jolloin $x = t^3 - 3$ ja $dx = 3t^2dt$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+3}} &= \int \frac{3t^2}{1+t}dt = 3\int \frac{t^2-1+1}{1+t}dt \\
&= 3\int \frac{(t-1)(t+1)+1}{1+t}dt = 3\int \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right)dt \\
&= 3\left(\frac{1}{2}t^2 - t + \ln|1+t|\right) + c \\
&= \frac{3}{2}t^2 - 3t + 3\ln|1+t| + c \\
&= \frac{3}{2}(x+3)^{\frac{2}{3}} - 3\sqrt[3]{x+3} + 3\ln|1+\sqrt[3]{x+3}| + c.
\end{aligned}
$$

c) Käytetään sijoitusta $1+2x = t^2$, missä $t > 0$, jolloin $t = \sqrt{1+2x}$, $x = \frac{t^2-1}{2} = \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}$ ja $dx = tdt$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{(1+2x)^{\frac{3}{2}}}dx &= \int \frac{(\frac{t^2-1}{2})^2}{t^3}\cdot t\,dt = \frac{1}{4}\int \frac{t^4-2t^2+1}{t^2}dt \\
&= \frac{1}{4}\int \left(t^2 - 2 + t^{-2}\right)dt \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{3}t^3 - 2t - \frac{1}{t}\right) + c \\
&= \frac{1}{12}t^3 - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4t} + c \\
&= \frac{1}{12}(1+2x)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{1+2x} - \frac{1}{4\sqrt{1+2x}} + c
\end{aligned}
$$

d) Käytetään sijoitusta $x = t^{12}$, $t > 0$, jolloin $t = x^{\frac{1}{12}}$ ja $dx = 12t^{11}dt$. Tällöin

$$\begin{aligned}\int \frac{x^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{6}}}{x^{\frac{3}{4}}} dx &= \int \frac{t^6 + t^2}{t^9} \cdot 12t^{11}\, dt = 12 \int (t^8 + t^4) dt \\ &= 12(\frac{1}{9}t^9 + \frac{1}{5}t^5) + c = \frac{4}{3}t^9 + \frac{12}{5}t^5 + c \\ &= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{4}} + \frac{12}{5}x^{\frac{5}{12}} + c.\end{aligned}$$