Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitusten malliratkaisut, viikko 14, kevät 2014

29. b) Jotta integroitava lauseke on määritelty, on oltava $x \neq 0$ ja $2x - x^2 > 0$. Jälkimmäinen epäyhtälö toteutuu, kun $0 < x < 2$. Käytetään sijoitusta $x = \dfrac{1}{t}$, jolloin $t = \dfrac{1}{x} > 0$ ja $dx = -\dfrac{1}{t^2}\,dt$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{x\sqrt{2x - x^2}} &= \int \frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}}}\,dt = -\int \frac{1}{t\sqrt{\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2}}}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{t^2(\frac{2}{t} - \frac{1}{t^2})}}\,dt = -\int \frac{1}{\sqrt{2t-1}}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int 2\cdot(2t-1)^{-\frac{1}{2}}dt = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(2t-1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \\
&= -\sqrt{2t-1} + c = -\sqrt{\frac{2}{x} - 1} + c.
\end{aligned}
$$

30. a) Tapa 1:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}(x-1)^2dx &= \int_{-2}^{2}(x^2 - 2x + 1)dx = \Big/_{\!-2}^{\,2}\left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right) \\
&= \left(\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2\right) - \left(\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + (-2)\right) \\
&= \frac{8}{3} - 4 + 2 + \frac{8}{3} + 4 + 2 = \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

Tapa 2:

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{2}(x-1)^2dx &= \Big/_{\!-2}^{\,2}\frac{(x-1)^3}{3} = \frac{(2-1)^3}{3} - \frac{(-2-1)^3}{3} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{27}{3} = \frac{28}{3}
\end{aligned}
$$

b)

$$\int_1^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \Big/_1^2 \ln|x^2+3x+2| = \ln|2^2+3\cdot 2+2| - \ln|1^2+3\cdot 1+2|$$

$$= \ln 12 - \ln 6 = \ln\frac{12}{6} = \ln 2$$

c)

$$\int_{-2}^2 x(x-1)^2 dx = \int_{-2}^2 x(x^2-2x+1)dx = \int_{-2}^2 (x^3-2x^2+x)dx$$

$$= \Big/_1^2 \left(\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - 2\cdot\frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2}\right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 2\cdot\frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2}\right)$$

$$= 4 - \frac{16}{3} + 2 - 4 - \frac{16}{3} - 2 = -\frac{32}{3}$$

d) Integroitava funktio on

$$f(x) = x|x-2| = \begin{cases} x^2-2x, & \text{kun } x \geq 2 \\ -x^2+2x, & \text{kun } x < 2. \end{cases}$$

Funktio f on polynomifunktiona jatkuva, kun $x \neq 2$. Koska

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 0 = \lim_{x\to 2^-} f(x),$$

niin f on jatkuva myös pisteessä $x = 2$. Näin ollen

$$
\begin{aligned}
\int_0^3 x|x-2|dx &= \int_0^2 x|x-2|dx + \int_2^3 x|x-2|dx \\
&= \int_0^2 (-x^2+2x)dx + \int_2^3 (x^2-2x)dx \\
&= \mathop{\Big/}_0^2 \left(-\frac{x^3}{3}+x^2\right) + \mathop{\Big/}_2^3 \left(\frac{x^3}{3}-x^2\right) \\
&= \left(-\frac{2^3}{3}+2^2\right) - \left(-\frac{0^3}{3}+0^2\right) + \left(\frac{3^3}{3}-3^2\right) - \left(\frac{2^3}{3}-2^2\right) \\
&= -\frac{8}{3}+4+9-9-\frac{8}{3}+4 = \frac{8}{3}
\end{aligned}
$$

32. a) Piirretään ensin kuva:

Kuvaajasta nähdään, että käyrien $y=\sqrt{1-x}$ ja $y=\sqrt{x-2}$ sekä suorien $y=1$ ja $y=2$ rajoittaman alueen pinta-ala A saadaan laskettua alueiden A_1, A_2 ja A_3 pinta-alojen summana. Lasketaan ensin käyrien ja suorien leikkauspisteet:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x} \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ x = 1 - y^2 = 1 - 2^2 = -3$$

$$\Rightarrow \text{Leikkauspiste } (-3, 2)$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{1-x} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ x = 1 - y^2 = 1 - 1^2 = 0$$

$$\Rightarrow \text{Leikkauspiste } (0, 1)$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ y = 1 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ x = y^2 + 2 = 1^2 + 2 = 3$$

$$\Rightarrow \text{Leikkauspiste } (3, 1)$$

$$\begin{cases} y = \sqrt{x-2} \\ y = 2 \end{cases} \qquad \Rightarrow \ x = y^2 + 2 = 2^2 + 2 = 6$$

$$\Rightarrow \text{Leikkauspiste } (6, 2)$$

Tällöin

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \int_{-3}^{0} (2-\sqrt{1-x})dx = \int_{-3}^{0} (2+(-1)\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}})dx = \Big/_{-3}^{0} \left(2x + \frac{(1-x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= 2\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot(1-0)^{\frac{3}{2}} - \left(2\cdot(-3) + \frac{2}{3}\cdot(1-(-3))^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= \frac{2}{3} + 6 - \frac{2}{3}\cdot 8 = \frac{2}{3} + \frac{18}{3} - \frac{16}{3} = \frac{4}{3}, \\
A_2 &= \int_{0}^{3} (2-1)dx = \int_{0}^{3} 1dx = \Big/_{0}^{3} x = 3-0 = 3, \\
A_3 &= \int_{3}^{6} (2-\sqrt{x-2})dx = \int_{3}^{6} (2-(x-2)^{\frac{1}{2}})dx = \Big/_{3}^{6} \left(2x - \frac{(x-2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) \\
&= 2\cdot 6 - \frac{2}{3}\cdot(6-2)^{\frac{3}{2}} - \left(2\cdot 3 - \frac{2}{3}\cdot(3-2)^{\frac{3}{2}}\right) \\
&= 12 - \frac{2}{3}\cdot 8 - 6 + \frac{2}{3} = 6 - \frac{2}{3}\cdot 7 = \frac{4}{3}.
\end{aligned}
$$

Siispä

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + 3 + \frac{4}{3} = \frac{17}{3}.$$