Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitusten malliratkaisut, viikko 15, kevät 2014

31. a) Valitaan $f'(x) = 1$ ja $g(x) = \ln x$. Tällöin $f(x) = x$ ja $g'(x) = \frac{1}{x}$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$\begin{aligned}
\int_1^e \ln x\, dx &= \int_1^e 1 \cdot \ln x\, dx = \Big/_1^e x \ln x - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\, dx \\
&= (e \ln e - 1 \cdot \ln 1) - \int_1^e 1\, dx = e - \Big/_1^e x \\
&= e - (e - 1) = 1
\end{aligned}$$

b) Jaetaan integroitavan lausekkeen nimittäjä tekijöihin. Nyt

$$\begin{aligned}
& x^2 + 3x + 2 = 0 \\
\Rightarrow \quad & x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-3 \pm 1}{2} \\
\Rightarrow \quad & x = -2 \text{ tai } x = -1,
\end{aligned}$$

joten $x^2 + 3x + 2 = (x - (-2))(x - (-1)) = (x + 2)(x + 1)$. Tehdään osamurtokehitelmä:

$$\frac{x+3}{x^2 + 3x + 2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+1}.$$

Kertomalla yhtälö puolittain termillä $(x + 2)(x + 1)$ saadaan

$$\begin{aligned}
x + 3 &= A(x + 1) + B(x + 2) = Ax + A + Bx + 2B \\
&= (A + B)x + (A + 2B)
\end{aligned}$$

Edelleen saadaan

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A + 2B = 3 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad (A + 2B) - (A + B) = 3 - 1 \\ &\Rightarrow \quad B = 2 \\ &\Rightarrow \quad A = 1 - B = 1 - 2 = -1. \end{aligned}$$

Näin ollen

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1},$$

joten

$$\int_1^2 \frac{x+3}{x^2+3x+2}\,dx = \int_1^2 \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{2}{x+1}\right)\,dx$$

$$= \Big/_1^2 (-\ln|x+2| + 2\ln|x+1|) = -\ln 4 + 2\ln 3 - (-\ln 3 + 2\ln 2)$$

$$= \ln 3^2 + \ln 3 - (\ln 4 + \ln 2^2) = \ln 27 - \ln 16 = \ln \frac{27}{16}.$$

32. b) Nyt

$$\begin{aligned} & y = \sqrt{1-x} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = 1 - x \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - y^2 \\ \text{ja} \quad & y = \sqrt{x-2} \quad \Leftrightarrow \quad y^2 = x - 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2 + y^2. \end{aligned}$$

Näin ollen a)-kohdassa piirretystä kuvasta nähdään, että

$$A = \int_1^2 ((y^2+2) - (1-y^2))\,dy = \int_1^2 (2y^2+1)\,dy$$

$$= \Big/_1^2 (\frac{2}{3}y^3 + y) = (\frac{2}{3}\cdot 2^3 + 2) - (\frac{2}{3}\cdot 1^3 + 1) = \frac{16}{3} + 2 - \frac{2}{3} - 1 = \frac{17}{3}$$

33. a) Huomaa, että käyrä $y^2 = 2x + 1$ koostuu käyristä $y = \sqrt{2x+1}$ ja $y = -\sqrt{2x+1}$. Piirretään ensin kuva:

Kuvaajasta nähdään, että käyrän $y^2 = 2x + 1$ ja suoran $y = x - 1$ rajoittaman alueen pinta-ala A saadaan laskettua alueiden A_1 ja A_2 pinta-alojen summana. Lasketaan ensin tarvittavat leikkauspisteet:

$$\begin{cases} y = \sqrt{2x+1} \\ y = -\sqrt{2x+1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{2x+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad y = 0 \quad \Rightarrow \text{Leikkauspiste } (-\frac{1}{2}, 0),$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = -\sqrt{2x+1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -\sqrt{2x+1} = x - 1, \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 4$$

$$\overset{-\frac{1}{2} \leq x \leq 1}{\Rightarrow} \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1 \quad \Rightarrow \text{Leikkauspiste } (0, -1),$$

$$\begin{cases} y = x - 1 \\ y = \sqrt{2x+1} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2x+1} = x - 1, \quad x \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2x + 1 = (x-1)^2 \quad \Leftrightarrow \quad x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \text{ tai } x = 4$$

$$\overset{x \geq 1}{\Rightarrow} \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow \text{Leikkauspiste } (4, 3).$$

Tällöin

$$A_1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} (\sqrt{2x+1} - (-\sqrt{2x+1})\, dx = \int_{-\frac{1}{2}}^{0} 2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx$$
$$= \Big/_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \Big/_{-\frac{1}{2}}^{0} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}((2 \cdot 0 + 1)^{\frac{3}{2}} - (2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 1)^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3},$$
$$A_2 = \int_{0}^{4} (\sqrt{2x+1} - (x-1))dx = \frac{1}{2} \int_{0}^{4} 2 \cdot (2x+1)^{\frac{1}{2}}\, dx + \int_{0}^{4} (-x+1)\, dx$$
$$= \frac{1}{2} \Big/_{0}^{4} \frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \Big/_{0}^{4} (-\frac{1}{2}x^2 + x)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3}((2 \cdot 4 + 1)^{\frac{3}{2}} - (2 \cdot 0 + 1)^{\frac{3}{2}}) + ((-\frac{1}{2} \cdot 4^2 + 4) - 0)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot (9^{\frac{3}{2}} - 1) - 4 = \frac{14}{3}.$$

Siispä

$$A = A_1 + A_2 = \frac{2}{3} + \frac{14}{3} = \frac{16}{3}.$$

b) Nyt

$$y^2 = 2x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$
$$\text{ja} \quad y = x - 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = y + 1.$$

Näin ollen a)-kohdassa piirretystä kuvasta nähdään, että

$$A = \int_{-1}^{3} ((y+1) - \frac{1}{2}(y^2 - 1))\, dy = \int_{-1}^{3} (-\frac{1}{2}y^2 + y + \frac{3}{2})\, dy$$
$$= \Big/_{-1}^{3} (-\frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{3}{2}y)$$
$$= (-\frac{1}{6} \cdot 3^3 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{3}{2} \cdot 3) - (-\frac{1}{6} \cdot (-1)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-1)^2 + \frac{3}{2} \cdot (-1))$$
$$= -\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} - (\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}) = \frac{16}{3}.$$

34. a) Valitaan $f'(x) = (1-x)^3$ ja $g(x) = x$. Tällöin $f(x) = -\frac{1}{4}(1-x)^4$ ja $g'(x) = 1$. Nyt osittaisintegroinnilla saadaan

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x(1-x)^3\,dx &= \Big/_{\!0}^{1} -\frac{1}{4}(1-x)^4 x - \int_0^1 -\frac{1}{4}(1-x)^4\,dx \\
&= \left(-\frac{1}{4}(1-1)^4 \cdot 1 + \frac{1}{4}(1-0)^4 \cdot 0\right) - \frac{1}{4}\Big/_{\!0}^{1} \frac{1}{5}(1-x)^5 \\
&= -\frac{1}{20}\left((1-1)^5 - (1-0)^5\right) = \frac{1}{20}.
\end{aligned}
$$

b) Käytetään sijoitusta $t = 1 - x$, jolloin $x = 1 - t = g(t)$ ja $dx = -dt = g'(t)\,dt$. Uudet integroimisrajat saadaan ratkaistua yhtälöistä $1 - t_1 = 0$ ja $1 - t_2 = 1$ eli $t_1 = 1$ ja $t_2 = 0$. Tällöin

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 x(1-x)^3\,dx &= \int_1^0 (1-t)t^3 \cdot (-1)\,dt = \int_1^0 (t^4 - t^3)\,dt \\
&= \Big/_{\!1}^{0} \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{1}{4}t^4\right) = 0 - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{20}.
\end{aligned}
$$