Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitusten malliratkaisut, viikko 18, kevät 2014

42. a)

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{9(1-\frac{4}{9}x^2)}}\,dx = \int \frac{1}{3\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}\,dx$$
$$= \int \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2}{3}x)^2}}\,dx = \frac{1}{2}\arcsin(\frac{2}{3}x)+c$$

b)

$$\int \frac{2}{4x^2+9}\,dx = \int \frac{2}{9(\frac{4}{9}x^2+1)}\,dx = \int \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{(\frac{2}{3}x)^2+1}\,dx$$
$$= \frac{1}{3}\int \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{(\frac{2}{3}x)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\arctan(\frac{2}{3}x)+c$$

45. Nyt

$$\begin{aligned}
& (1+x^2)\frac{dy}{dx} + x(1+y) = 0 && (*) \\
\Leftrightarrow\quad & (1+x^2)\frac{dy}{dx} = -x(1+y) && \Big|\ :(1+x^2)\neq 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1+x^2}\cdot(1+y), &&
\end{aligned}$$

joten differentiaaliyhtälö $(*)$ on separoituva. Siispä

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{1+x^2}\cdot(1+y) && \Big|\ :(1+y)\neq 0 \quad \Big|\ \cdot dx \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{1+y}\,dy = -\frac{x}{1+x^2}\,dx && \Big|\ \int \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{1+y}\,dy = -\int \frac{x}{1+x^2}\,dx && \\
\Leftrightarrow\quad & \int \frac{1}{1+y}\,dy = -\frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx && \\
\Leftrightarrow\quad & \ln|1+y| = -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C && \Big|\ 1+x^2>0 \text{ kun } x\in\mathbb{R}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|1+y| = \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} + C \qquad \Big| \, e^{()}$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{\ln|1+y|} = e^{\ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}+C}$$

$$\Leftrightarrow \quad |1+y| = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot e^C = |C|(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \Big| \, \text{Merkitään } e^C = |C| > 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 1+y = \pm|C|(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \qquad \Big| \, \text{Merkitään } \pm|C| = C$$

$$\Leftrightarrow \quad y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} - 1, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Tarkastellaan vielä tilanne $y = -1$. Tällöin

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + x(1+y) = (1+x^2) \cdot 0 + x(1-1) = 0,$$

joten myös $y = -1$ on differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu ja se sisältyy yleiseen ratkaisuun vakion C arvolla 0. Siispä differentiaaliyhtälön $(*)$ yleinen ratkaisu on

$$y = \frac{C}{\sqrt{1+x^2}} - 1, \quad C \in \mathbb{R}.$$

43. Nyt

$$\frac{dy}{dx} + 2y = \sin 2x \qquad (*)$$

on täydellinen 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö.

1° Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0 \qquad \Big| \, \text{separoituva}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -2y \qquad \Big| \, : y \neq 0 \quad \Big| \, \cdot dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{y}\, dy = -2\, dx \qquad \Big| \, \int$$

$$\Leftrightarrow \quad \int \frac{1}{y}\, dy = \int -2\, dx$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln|y| = -2x + C \qquad \Big| \, e^{()}$$

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad e^{\ln|y|} = e^{-2x+C} \\
&\Leftrightarrow \quad |y| = e^{-2x} \cdot e^{C} = |C|e^{-2x} && \Big| \text{Merkitään } e^{C} = |C| > 0 \\
&\Leftrightarrow \quad y = \pm|C|e^{-2x} && \Big| \text{Merkitään } \pm|C| = C \\
&\Leftrightarrow \quad y = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.
\end{aligned}
$$

Lisäksi nähdään, että $y = 0$ on myös homogeenisen yhtälön ratkaisu, joten homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2° Täydellisen yhtälön eräs ratkaisu:
Tehdään yrite $y_1(x) = A\sin 2x + B\cos 2x$. Tällöin $y_1'(x) = 2A\cos 2x - 2B\sin 2x$, joten yhtälöön $(*)$ sijoittamalla saadaan

$$
\begin{aligned}
& \quad 2A\cos 2x - 2B\sin 2x + 2(A\sin 2x + B\cos 2x) = \sin 2x \\
\Leftrightarrow & \quad (2A - 2B)\sin 2x + (2A + 2B)\cos 2x = \sin 2x \\
\Rightarrow & \quad \begin{cases} 2A - 2B = 1 \\ 2A + 2B = 0 \end{cases} \\
\Rightarrow & \quad 4A = 1 \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{1}{4} \\
\Rightarrow & \quad B = -A = -\frac{1}{4}.
\end{aligned}
$$

Näin ollen differentiaaliyhtälön $(*)$ eräs ratkaisu on

$$y_1(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x.$$

3° Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\cos 2x, \quad C \in \mathbb{R}.$$

44. Nyt

$$\frac{dy}{dx} + 2y = x^2 + e^x \qquad (*)$$

on täydellinen 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö.

1° Vastaavan homogeenisen yhtälön yleinen ratkaisu:

Tehtävässä 43. laskettiin vastaavan homogeenisen yhtälön

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

yleinen ratkaisu

$$y_0(x) = Ce^{-2x}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

2° Täydellisen yhtälön eräs ratkaisu:

Tehdään yrite $y_1(x) = A + Bx + Dx^2 + Ee^x$. Tällöin $y_1'(x) = B + 2Dx + Ee^x$, joten yhtälöön $(*)$ sijoittamalla saadaan

$$\begin{aligned}
& B + 2Dx + Ee^x + 2(A + Bx + Dx^2 + Ee^x) = x^2 + e^x \\
\Leftrightarrow \quad & (B + 2A) + (2B + 2D)x + 2Dx^2 + 3Ee^x = x^2 + e^x \\
\Rightarrow \quad & \begin{cases} B + 2A = 0 \\ 2B + 2D = 0 \\ 2D = 1 \\ 3E = 1 \end{cases} \\
\Rightarrow \quad & D = \frac{1}{2}, \; E = \frac{1}{3} \\
\Rightarrow \quad & B = -D = -\frac{1}{2} \\
\Rightarrow \quad & A = -\frac{B}{2} = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Näin ollen differentiaaliyhtälön $(*)$ eräs ratkaisu on

$$y_1(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}e^x.$$

3° Täydellisen yhtälön yleinen ratkaisu on

$$y(x) = y_0(x) + y_1(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}e^x, \quad C \in \mathbb{R}.$$