Matematiikan perusteet taloustieteilijöille II

Harjoitusten malliratkaisut, viikko 19, kevät 2014

46. Nyt

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2} \qquad (*) \tag{1}$$

on täydellinen 1. kertaluvun lineaarinen differentiaaliyhtälö. Kerrotaan $(*)$ puolittain lausekkeella

$$e^{\int 2x\,dx} = e^{x^2},$$

jolloin saadaan tulon derivoimissäännöstä

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} + 2xy = 2xe^{-x^2} && \Big|\cdot e^{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dy}{dx}\cdot e^{x^2} + 2xy\cdot e^{x^2} = 2xe^{-x^2}\cdot e^{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{d}{dx}(e^{x^2}\cdot y) = 2x.
\end{aligned}$$

Edelleen integroimalla puolittain saadaan

$$\begin{aligned}
& \int \frac{d}{dx}(e^{x^2}\cdot y) = \int 2x\,dx \\
\Leftrightarrow \quad & e^{x^2}\cdot y = x^2 + C && \Big| : e^{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & y = \frac{x^2}{e^{x^2}} + \frac{C}{e^{x^2}} \\
\Leftrightarrow \quad & y = x^2 e^{-x^2} + Ce^{-x^2}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

47. a) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö ilman alkuehtoa. Nyt

$$\begin{aligned}
& (x+y)dx + (x-y)dy = 0 && \Big| : dx \\
\Leftrightarrow \quad & (x+y) + (x-y)\frac{dy}{dx} = 0 && (1) \\
\Leftrightarrow \quad & (y-x)\frac{dy}{dx} = x + y && \Big| : (y-x) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x} \overset{\text{merk.}}{=} f(x,y). && (*)
\end{aligned}$$

Olkoon $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Koska

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda x + \lambda y}{\lambda y - \lambda x} = \frac{\lambda(x+y)}{\lambda(y-x)} = \frac{x+y}{y-x} = f(x,y),$$

niin differentiaaliyhtälö $(*)$ on homogeeninen. Tehdään sijoitus

$$u = \frac{y}{x} \quad \Leftrightarrow \quad y = ux,$$

jolloin $\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u$. Tällöin differentiaaliyhtälö $(*)$ saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
& \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y-x} = \frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{1+u}{u-1} \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{du}{dx} \cdot x = \frac{1+u}{u-1} - u = \frac{-u^2+2u+1}{u-1} && \Big| \cdot dx \quad \Big| \cdot (u-1) \\
\Leftrightarrow \quad & x(u-1)du = (-u^2+2u+1)dx && \Big| : x \neq 0 \quad \Big| : (-u^2+2u+1) \neq 0 \\
\Leftrightarrow \quad & \frac{u-1}{-u^2+2u+1}\, du = \frac{1}{x}\, dx && (**).
\end{aligned}$$

Nyt differentiaaliyhtälö $(**)$ on separoituva, joten puolittain integroimalla saadaan

$$\begin{aligned}
& \int \frac{u-1}{-u^2+2u+1}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2} \int \frac{-2u+2}{-u^2+2u+1}\, du = \int \frac{1}{x}\, dx \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{2} \ln|-u^2+2u+1| = \ln|x| + C \\
\Leftrightarrow \quad & \ln|-u^2+2u+1| = -2\ln|x| + C \\
\Leftrightarrow \quad & e^{\ln|-u^2+2u+1|} = e^{-2\ln|x|+C} \\
\Leftrightarrow \quad & |-u^2+2u+1| = e^{\ln|x|^{-2}} \cdot \underbrace{e^C}_{=|C|} && \Big| \text{huom. } |C| > 0 \\
\Leftrightarrow \quad & |-u^2+2u+1| = |x|^{-2}|C| = \frac{|C|}{x^2} \\
\Leftrightarrow \quad & -u^2+2u+1 = \pm\frac{|C|}{x^2} = \frac{C}{x^2}. && \Big| \text{merk. } \pm|C| = C \neq 0
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\Leftrightarrow \qquad & -u^2 + 2u + 1 - \frac{C}{x^2} = 0 \\
\Leftrightarrow \qquad & u = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (1 - \frac{C}{x^2})}}{2 \cdot (-1)} \\
\Leftrightarrow \qquad & u = \frac{2 \pm \sqrt{4(2 - \frac{C}{x^2})}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2 - \frac{C}{x^2}}}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad & u = 1 \pm \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}}
\end{aligned}
$$

Tehdään takaisin sijoitus $u = \frac{y}{x}$, jolloin saadaan

$$
\begin{aligned}
& \frac{y}{x} = 1 \pm \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}} && \Big| \cdot x \\
\Leftrightarrow \qquad & y = x \pm x\sqrt{2 + \frac{C}{x^2}} = x \pm \sqrt{x^2(2 + \frac{C}{x^2})} \\
\Leftrightarrow \qquad & y = x \pm \sqrt{2x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. && (2)
\end{aligned}
$$

Tutkitaan vielä aiemmin poissuljetut tapaukset.

Olkoon ensin $y - x = 0$ eli $y = x$, jolloin $\frac{dy}{dx} = 1$. Tällöin alkuperäinen differentiaaliyhtälö (1) on muotoa

$$(x + x) + (x - x) \cdot 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x = 0.$$

Tämä pätee vain, kun $x = 0$, joten $y = x$ ei ole yleinen ratkaisu.

Olkoon sitten $-u^2+2u+1 = 0$. Aiemmin lasketun nojalla tämän yhtälön ratkaisu saadaa yhtälöstä (2) vakion C arvolla 0. Tutkitaan, onko

$$y = x \pm \sqrt{2x^2 + 0} = x \pm |x|\sqrt{2} = x(1 \pm \sqrt{2})$$

yhtälön $(*)$ ratkaisu. Sijoittamalla $y = x(1 + \sqrt{2})$ yhtälöön $(*)$ saadaan

$$1 + \sqrt{2} = \frac{x + x(1 + \sqrt{2})}{x(1 + \sqrt{2}) - x} = \frac{x(2 + \sqrt{2}}{x\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 1$$

eli $y = x(1 + \sqrt{2})$ on differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu. Vastaavasti laskemalla nähdään, että myös $y = x(1 - \sqrt{2})$ on ratkaisu. Siispä differentiaaliyhtälön (1) yleinen ratkaisu on $y = x \pm \sqrt{2x^2 + C}$, $C \in \mathbb{R}$.

b) Ratkaistaan differentiaaliyhtälö

$$(x+y)dx + (x-y)dy = 0 \qquad (*)$$

toisella tavalla. Nyt $M(x,y) = x+y$ ja $N(x,y) = x-y$. Tällöin

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 1 = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

joten $(*)$ on eksakti differentiaaliyhtälö. Etsitään $g(x,y)$, jolle $\frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$ ja $\frac{\partial g(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$. Nyt

$$\int M(x,y)\,dx = \int (x+y)\,dx = \frac{1}{2}x^2 + yx,$$
$$\int N(x,y)\,dy = \int (x-y)\,dy = -\frac{1}{2}y^2 + xy,$$

joten $g(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + C$, missä $C \in \mathbb{R}$ on vakio. Näin ollen differentiaaliyhtälön $(*)$ ratkaisu saadaan ratkaisemalla y yhtälöstä $g(x,y) = 0$. Siispä

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}x^2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + C = 0 && \Big| \cdot (-2),\ \text{merk.}\ -2C = C \\
\Leftrightarrow\quad & y^2 - 2xy - x^2 + C = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{2x \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4\cdot(-x^2 + C)}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4x^2 - 4C}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & y = \frac{2x \pm \sqrt{4(2x^2 - C)}}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & y = x \pm \sqrt{2x^2 + C}, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$