MPTT 2, Viikko 7

(10) a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Kolme pystyriviä ja 3 vaakariviä $\Rightarrow 1 \leq r(A) \leq 3$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \cdot \left(-\tfrac{1}{6}\right)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} -1 \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0$$

Lause 1.6: $\det A \neq 0$ eli A^{-1} $\exists$ ja A on säännöllinen
$\Rightarrow r(A) = 3$

(Matriisin rivin kertominen vakiolla $-\frac{1}{6}$ ei muuta matriisin astetta, mutta muuttaa determinantin arvon.)

b) $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $1 \leq r(A) \leq 4$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -6 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ -1 \\ -1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyt $1 \leq r(A) \leq 3$, koska 4×4 -matriisin determinantti on nolla

Eräs 3×3 -alimatriisin determinantti:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

Nyt 3 on suurin sellainen kokonaisluku, että matriisilla A on olemassa 3×3 -alimatriisi, jonka determinantti $\neq 0$.

$\Rightarrow r(A)=3$.

c) $$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & -1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & -3 & 1 \\ 6 & 8 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{matrix}$$

$1 \leq r(A) \leq 4$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 2 & 24 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ -2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & 12 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nyt 4×4 -matriisin determinantti ja kaikkien 3×3 -matriisien determinantti on nolla.

Eräs 2×2 -alimatriisin determinantti

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \quad \Rightarrow r(A) = 2$$

---

11) $$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriisin A ominaisarvot saadaan yhtälön $|A-\lambda I_n|=0$ reaalijuurina

$$A-\lambda I_3 = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$|A - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 & 4 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda)$$

$$|A - \lambda I_3| = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad (5-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Tulon nollasääntö $\Rightarrow$ ominaisarvot ovat
$\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \ \lambda_3 = 5$

Ominaisarvoon λ liittyvät ominaisvektorit saadaan yhtälön $(A - \lambda I_n)\bar{x} = \bar{0}$ ratkaisuna $\bar{x}$, missä $\bar{x} \neq \bar{0}$.

$$\lambda_1 = 1: \quad A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(A - \lambda_1 I)\bar{x} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{sij} \qquad \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2x_2 = -4x_1$$
$$\Leftrightarrow x_2 = -2x_1$$

Siis $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -2x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_2 = 2$: $(A - \lambda_2 I)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \text{sij}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 = -10x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{10}{3}x_3 \\ x_2 = 3x_3 \end{cases}$$

Siispä $\bar{x} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3}x_3 \\ 3x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$, missä $x_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lambda_3 = 5$: $(A - \lambda_3 I)\bar{x} = \bar{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_2 + 3x_3 = 0 \\ -3x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_2 + 4 \cdot 0 = 0 \\ -4x_2 + 3 \cdot 0 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ ja $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, koska 1. pystyrivi on nolla.

Siis $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, missä $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(12) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 7z^2 - xy$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = 2x - y \\ f_y = 2y - x \\ f_z = 14z \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 2y - x = 0 \\ 14z = 0 \end{cases} \Rightarrow z = 0$$

$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -x + 2y = 0 \end{cases} \quad | \cdot 2$$

$$+\begin{cases} 2x - y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$3y = 0$$

$$y = 0 \Rightarrow x = 2 \cdot 0 = 0$$

Siis piste $\bar{x}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2) Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{x}_0$

$$H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

$$|H_1(\bar{x}_0)| = 2 > 0$$

$$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{vmatrix} = 14 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 14 \cdot 3 = 42 > 0$$

Näin ollen $H(\bar{x}_0)$ on positiividefiniitti.

$\Rightarrow$ Piste $(0,0,0)$ on paikallinen minimikohta ja ainoana kriittisenä pisteenä ja minimikohtana absoluuttinen minimikohta.

$f(0,0,0) = 0^2 + 0^2 + 7 \cdot 0^2 - 0 \cdot 0 = 0$ absoluuttinen minimiarvo

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y=0 \\ z=0}} (x^2 + y^2 + 7z^2 - xy) = \infty$$

$\Rightarrow$ ei absoluuttista maksimia.