MPTT 2. viikko 8

(13.) $f(x,y,z) = 2x^2 + 4y^2 - 6z^2$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo:

$$\begin{cases} f_x = 4x \\ f_y = 8y \\ f_z = -12z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x = 0 \\ 8y = 0 \\ -12z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta.

2.) Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{x}_0$

$H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

$|H_1(\bar{x}_0)| = 4 > 0$

$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 32 > 0$

$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 \cdot (-12) = -384 < 0$

$(-1)^i |H_i(\bar{x}_0)| > 0$?

$(-1)^1 |H_1(\bar{x}_0)| = -4 < 0$

$(-1)^2 |H_2(\bar{x}_0)| = 32 > 0$

$(-1)^3 |H_3(\bar{x}_0)| = 384 > 0$

Nyt $|H_i(\bar{x}_0)| \neq 0$, kun $i=1,2,3$ ja lauseen 1.8. kohdat 1) ja 2) eivät toteudu, joten kriittinen piste $\bar{x}_0$ ei ole paikallinen ääriarvokohta. (lauseen 1.8. kohta 3))

Nyt $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ y=0 \\ z=0}} (2x^2+4y^2-6z^2) = \infty$ ja

$\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ y=0 \\ x=0}} (2x^2+4y^2-6z^2) = -\infty$

$\Rightarrow$ Ei absoluuttista maksimia eikä minimiä.

---

(14) $f(x,y,z) = -x^2-2y^2-z^2+xy+z$ ehdolla $x+y+z=35$.

Ehtoyhtälö $g(x,y,z) = x+y+z-35$.
Muuttujat $n=3$ ja yhtälörajoitteet $m=1$.

Lagrange -funktio:

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) - \lambda g(x,y,z)$$
$$= -x^2-2y^2-z^2+xy+z-\lambda(x+y+z-35)$$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-\lambda = 0 \\ -4y+x-\lambda = 0 \\ -2z+1-\lambda = 0 \\ x+y+z-35 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y-\lambda = 0 \\ x-4y-\lambda = 0 \\ -2z-\lambda = -1 \\ x+y+z = 35 \end{cases}$$

Gauss:

$$(A|c) = \left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 1 & -4 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -1 \\ \\ 2 \end{array}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & -5 & -1 & -1 & -35 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 70 \end{array}\right) 2 \quad \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & -1 & 70 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & -70 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & 8 & -245 \end{array}\right) \begin{matrix} -1 \\ -4 \end{matrix} \quad \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 105 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \end{array}\right) \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 0 & -39 & 828 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & -483 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \end{array}\right) \Big| \cdot \frac{1}{23} \quad \sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 & -69 \\ 0 & 1 & 0 & -39 & 828 \\ 0 & 0 & 1 & 12 & -241 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \end{array}\right) \begin{matrix} -12 \\ 39 \\ -4 \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -21 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 9 \\ z = 11 \\ \lambda = -21 \end{cases}$$

Siis piste $\bar{x} = (15, 9, 11)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta.

2) Sidotun ääriarvon olemassaolo ja laatu

Laajennettu Hessin matriisi

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad |H_i|,\ i = m+1, \dots, n \Rightarrow i = 2, 3$$

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} -1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -(-5-3) = 8$$

$$|\bar{H}_3| = |\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} 2 \;\; -1 \\ -1 \end{matrix}$$

$$= -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3+20) = -23$$

$(-1)^i |\overline{H}_i|$: $\quad (-1)^2 |\overline{H}_2| = (-1)^2 \cdot 8 = 8 > 0$

$\quad (-1)^3 |\overline{H}_3| = (-1)^3 \cdot (-23) = 23 > 0$

Nyt kohta 1) (sivu 28) toteutuu, joten piste $(15, 9, 11)$ on paikallinen sidottu maksimikohta.

Ainoana mahdollisena ääriarvokohtana ja maksimikohtana KRP on absoluuttinen maksimikohta ehdolla $x+y+z=35$.

$f(15, 9, 11) = -15^2 - 2 \cdot 9^2 - 11^2 + 15 \cdot 9 + 11 = -362$

sidottu maksimiarvo

Vast. Paikallinen ja absoluuttinen sidottu maksimi $f(15, 9, 11) = -362$. Ei paikallisia eikä absoluuttisia minimejä.

Arvioinnit:

Ehto $x+y+z=36$

Vakio muuttuu $36-35=1 \Rightarrow$ optimiarvo muuttuu $\lambda_1 = -21$ yksikköä

$\Rightarrow f(15, 9, 11) = -362 - 21 = -383$

Ehto $x+y+z=34$

vakion muutos -1

$\Rightarrow f(15, 9, 11) = -362 - (-21) = -341$

(15.) $f(x,y,z) = x^2 + 2y - 2x - 10z - 3$
ehdoilla $2x + 2y + 2z = 0$ ja $x = -2y - 3z$

ehtoyhtälöt $g_1(x,y,z) = 2x + 2y + 2z$
$g_2(x,y,z) = x + 2y + 3z$

muuttujat $n = 3$ ja yhtälörajoitteet $m = 2$

Lagrange-funktio:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g_1(x,y,z) - \lambda_2 g_2(x,y,z)$$
$$= x^2 + 2y - 2x - 10z - 3 - \lambda_1(2x + 2y + 2z) - \lambda_2(x + 2y + 3z)$$

1) Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} L_x = 0 \\ L_y = 0 \\ L_z = 0 \\ L_{\lambda_1} = 0 \\ L_{\lambda_2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 2 - 2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -10 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 0 \\ 2x + 2y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases}$$

$$(A|c) = \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 10 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) -2$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) -1 \quad 1 \sim \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 12 \\ 0 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ \cdot(-1) \\ 1\cdot(-\frac{1}{2}) \\ \\ \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) -1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) 1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & -10 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -5 \end{array}\right) 1 \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) -1$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \cdot(-1) \\ \\ \\ 2 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -16 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -16 \\ z = 8 \\ \lambda_1 = 13 \\ \lambda_2 = -12 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (8, -16, 8)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP).

2) Sidotun ääriarvon olemassaolo ja laatu

Laajennettu Hessin matriisi:

$$\bar{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad |\bar{H}_i| = ? \quad i = m+1, \ldots, n$$

$m = 2$

$n = 3 \Rightarrow i = 3$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} -1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-1) \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (6-4) = 8$$

$(-1)^i |\bar{H}_i| = (-1)^3 |\bar{H}_3| = -8 < 0$ kohta 1) ei toteudu

$(-1)^m |\bar{H}_i| = (-1)^2 |\bar{H}_3| = 8 > 0$ kohta 2) toteutuu

Piste : (8, -16, 8) on paikallinen sidottu minimikohta

$f(8,-16,8) = -67$ sidottu minimikohta

Vast. Paikallinen ja absoluuttinen sidottu minimi $f(8,-16,8) = -67$. Ei paikallisia eikä absoluuttista sidottua maksimia.