MPTT2, Viikko 9

16.

a) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ehdolla $x+y+z \leq 35$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöä

1° Ääriarvon mahdollinen olemassaolo

$$\begin{cases} f_x = -2x + y \\ f_y = -4y + x \\ f_z = -2z + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + y = 0 \\ -4y + x = 0 \\ -2z + 1 = 0 \end{cases}$$

$2z = 1$

$z = 1/2$

$x = 4y$

$\Rightarrow -8y + y = 0$

$\Leftrightarrow y = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1/2 \end{cases}$$

Piste $\bar{x}_0 = (0, 0, 1/2)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta (KRP)

2° Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

Hessin matriisi pisteessä $\bar{x}_0$: $H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$|H_1(\bar{x}_0)| = -2 < 0$

$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 8 - 1 = 7 > 0$

$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -2(8-1) = -14 < 0$

$(-1)^1 |H_1(\bar{x}_0)| = 2 > 0$

$(-1)^2 |H_2(\bar{x}_0)| = 7 > 0$

$(-1)^3 |H_3(\bar{x}_0)| = 14 > 0$ $\Rightarrow H(\bar{x}_0)$ on negatiividefiniitti

Koska $0 + 0 + 1/2 \leq 35$, niin piste $(0, 0, 1/2)$ on paikallinen maksimikohta ehtoalueen sisäpuolella.

Ainoana kriittisenä pisteenä ja maksimikohtana se on absoluuttinen maksimikohta ehtoalueen sisällä

$f(0,0,1/2) = -0^2 - 2\cdot 0^2 - (1/2)^2 + 0\cdot 0 + 1/2 = 1/4$ absoluuttinen maksimiarvo

$\lim\limits_{\substack{x\to -\infty \\ y=0 \\ z=0}} (-x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z) = -\infty$

$\Rightarrow$ ei absoluuttista minimiä

$-\infty + 0 + 0 \leq 35$ eli ehto toteutuu

Vastaus: Paikallinen ja absoluuttinen epäyhtälöehdon mukainen sidottu maksimi $f(0,0,1/2) = 1/4$.
Ei paikallista tai absoluuttista minimiä.

b) $f(x,y,z) = -x^2 - 2y^2 - z^2 + xy + z$ ehdolla $x+y+z \geq 35$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöehtoa
a)-kohta $\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (0,0,1/2)$ on ehtoalueen ulkopuolinen paikallinen maksimikohta

2) Ääriarvotetaan funktio ehdolla $x+y+z=35$
Tehtävä 14 $\Rightarrow$ Piste $\bar{x}_0 = (15,9,11)$ on sidottu paikallinen maksimikohta

Ainoana kriittisenä pisteenä ja maksimikohtana se on absoluuttinen maksimikohta ehtoalueen reunalla

$f(15,9,11) = -362$ absoluuttinen sidottu maksimiarvo

$\lim\limits_{\substack{x\to \infty \\ y=0 \\ z=0}} (-x^2 - 2y^2 - z^2 - xy + z) = -\infty$ $\Rightarrow$ ei absoluuttista minimiä.

$\infty + 0 + 0 \geq 35$ eli ehto toteutuu

Vast. Paikallinen ja absoluuttinen epäyhtälöehdon mukainen sidottu maksimi $f(15,9,11) = -362$
Ei paikallista tai absoluuttista minimiä.

17. $f(x,y,z) = xy + xz + yz$ ehdolla $xyz \geq 125$

1) Ääriarvotetaan funktio ilman epäyhtälöehtoa

1° Ääriarvon mahdollinen olemassaolo (KRP)

$$\begin{cases} f_x = y+z \\ f_y = x+z \\ f_z = x+y \end{cases} \qquad \begin{cases} y+z=0 \\ x+z=0 & \Rightarrow z=-x \\ x+y=0 & \Rightarrow y=-x \end{cases}$$

$$-x-x=0$$
$$x=0 \quad \Rightarrow \quad y=0$$
$$z=0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$ Piste $\bar{x}_0 = (0,0,0)$ on ainoa mahdollinen paikallinen ääriarvokohta

2° Ääriarvon olemassaolo ja laatu

Hessin matriisi $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $H(\bar{x}_0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$|H_1(\bar{x}_0)| = 0$

$|H_2(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$

$|H_3(\bar{x}_0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \overset{-1}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (1+1) = 2 > 0$

Testi ei kerro mitään, joten tutkitaan tarkemmin

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=1 \\ z=1}} (xy + xz + yz) = \infty \quad \text{ei abs max}$$

toteuttaa ehdon $xyz \geq 125$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=-1 \\ z=-1}} (xy + xz + yz) = -\infty \quad \text{ei abs min}$$

toteuttaa ehdon $xyz \geq 125$

(20.) $f(x,y) = 45x + 55y$ rajoitteilla

$$6x + 4y \leq 120$$
$$3x + 10y \leq 180$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Muodostetaan ratkaisumonikulmio:

Reuna $6x + 4y = 120$

$x = 0 \Rightarrow y = 30$

$y = 0 \Rightarrow x = 20$

Reuna $3x + 10y = 180$

$x = 0 \Rightarrow y = 18$

$y = 0 \Rightarrow x = 60$

Reunojen leikkauspiste:

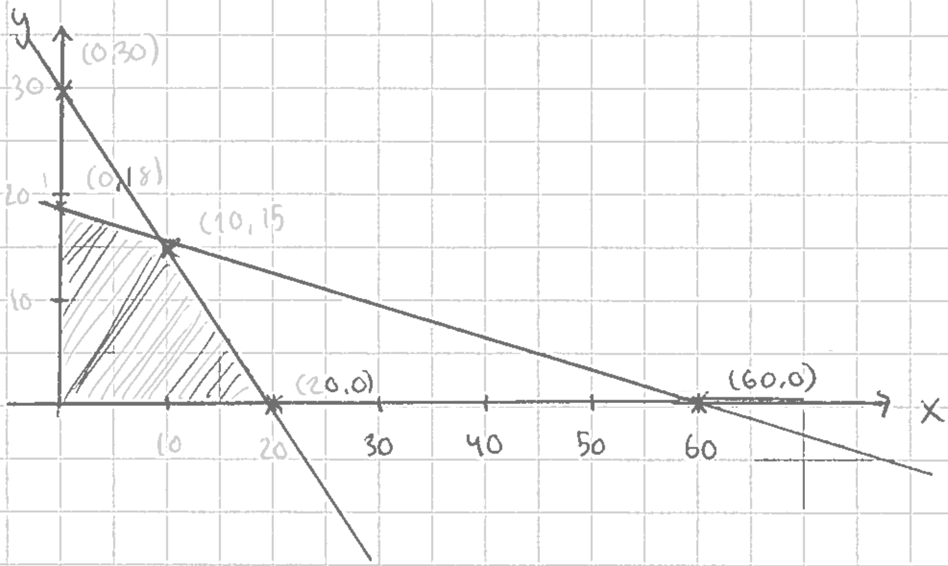
$$\begin{cases} 6x + 4y = 120 \\ 3x + 10y = 180 \quad | \cdot (-2) \end{cases}$$

$$+\begin{cases} \cancel{6x} + 4y = 120 \\ \cancel{-6x} - 20y = -360 \end{cases}$$

$$-16y = -240$$
$$y = 15$$

$\Rightarrow$
$$6x = 120 - 4y$$
$$x = 20 - \tfrac{2}{3}y$$
$$= 20 - \tfrac{2}{3} \cdot 15$$
$$= 10$$

Ratkaisumonikulmio:



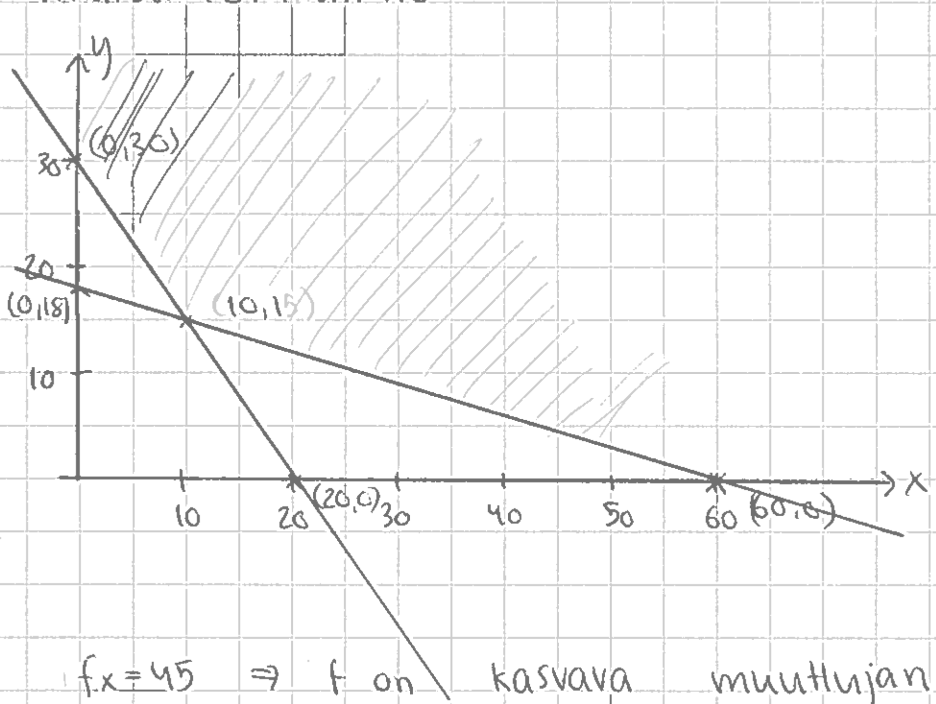
KRP (x,y)	$f(x,y) = 45x+55y$	
$(0,0)$	$45\cdot 0 + 55\cdot 0 = 0$	abs. min
$(0,18)$	$45\cdot 0 + 18\cdot 55 = 990$	
$(10,15)$	$45\cdot 10 + 55\cdot 15 = 1275$	abs. max
$(20,0)$	$45\cdot 20 + 55\cdot 0 = 900$	

Absoluuttinen maksimi $f(10,15) = 1275$
Absoluuttinen minimi $f(0,0) = 0$

---

22. $f(x,y) = 45x+55y$ rajoitteilla
$6x+4y \geq 120$
$3x+10y \geq 180$
$x \geq 0$
$y \geq 0$

Ratkaisumonikulmio:



$f_x = 45 \Rightarrow$ f on kasvava muuttujan x suhteen
$f_y = 55 \Rightarrow$ f on kasvava muuttujan y suhteen

KRP (x,y)	$f(x,y) = 45x+55y$	
$(0,30)$	$45\cdot 0 + 55\cdot 30 = 1650$	
$(10,15)$	$45\cdot 10 + 55\cdot 15 = 1275$	absmin
$(60,0)$	$45\cdot 60 + 55\cdot 0 = 2700$	

absoluuttinen minimi $f(10,15) = 1275$

$\lim_{\substack{x\to\infty \\ y=1}} (45x+55y) = \infty$ ei absoluuttista maksimia