DISKREETTI MATEMATIIKKA

Harjoitus 2, syksy 2005

1. Mitä ominaisuuksia (refleksiivinen, symmetrinen, antisymmetrinen, transitiivinen, vertailullinen) relaatiolla $R \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ on, kun $x \, R \, y$ jos ja vain jos

   a) $xy \geq 1$, b) $x = y + 1$ tai $x = y - 1$, c) $x = y^2$,
   d) $x \geq y^2$?

2. Olkoot R ja S joukon X relaatioita. Osoita, että $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$ ja $(S \cup R)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$.

3. Olkoot R ja S joukon X relaatioita ja $R \subseteq S$. Osoita, että $R^n \subseteq S^n$ aina, kun $n \in \mathbb{Z}_+$.

4. Osoita, että joukon X relaatio R on symmetrinen jos ja vain jos $R^{-1} = R$ ja antisymmetrinen jos ja vain jos $R \cap R^{-1} \subseteq I$.

5. Jos $R \subseteq X \times X$ on symmetrinen ja transitiivinen relaatio, voidaan tehdä seuraava (oikea) päättely:

   $$x \, R \, y \overset{\text{symm.}}{\Longrightarrow} y \, R \, x \overset{\text{trans.}}{\Longrightarrow} x \, R \, x.$$

   Tästä olisi houkuttelevaa päätellä, että R on refleksiivinen. Miksi tätä viimeistä päätelmää ei voi tehdä? Anna esimerkki (vaikkapa joukon $X = \{1, 2\}$) relaatiosta, joka on symmetrinen ja transitiivinen, mutta ei refleksiivinen.

6. Konstruoi joukon $\{1, 2, 3, 4\}$ relaatio R, jolle $t(R) \neq R \cup R^2 \cup R^3$. Miten tämän esimerkin saa yleistettyä joukon $\{1, 2, \ldots, n\}$ relaatioksi S, jolle $t(S) \neq S \cup S^2 \cup \cdots \cup S^{n-1}$?