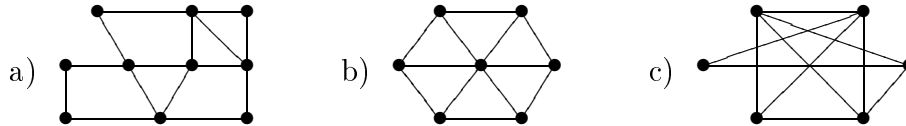


## DISKREETTI MATEMATIIKKA

Harjoitus 7, syksy 2005

1. Onko seuraavissa verkoissa Eulerin ketjua? Perustele vastauksesi ja etsi ketju, jos mahdollista.

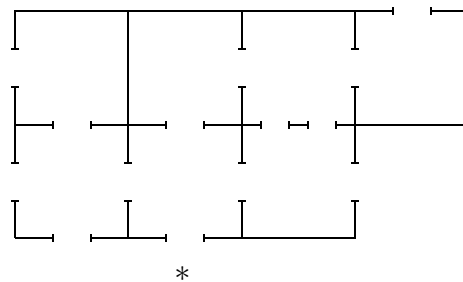


2. Anna esimerkki verkosta, jossa a) ei ole Eulerin eikä Hamiltonin ketjua, b) on Eulerin ketju mutta ei Hamiltonin ketjua, c) ei ole Eulerin ketjuja mutta on Hamiltonin ketju, d) on sekä Eulerin että Hamiltonin ketju.

3. Olkoon  $G = (V, E, \alpha)$  verkko ja  $M_G$  sen yhteysmatriisi. Olkoon  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  ja matriisin  $M_G$  rivit indeksöity samaan järjestykseen. Osoita, että tällöin matriisin  $M_G^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $(i, j)$ -alkio on  $k$ -pituisten ketjujen  $v_i \rightarrow v_j$  lukumäärä. Vihje: Käytä induktiota eksponentin  $k$  suhteen ja mieti, mikä on  $(i, j)$ -alkio matriisissa  $M_G^{k+1} = M_G \cdot M_G^k$ .

Osoita edelleen, että  $G$  on yhtenäinen jos ja vain jos matriisin  $\sum_{k=0}^{n-1} M_G^k = (M_G^n - I)/(M_G - I)$  alkio on nollasta eroavia. Tässä  $I$  on yksikkömatriisi.

4. Nipa ja Pipsa haluavat kulkea (käsi kädessä) taloon autioon (pohjapiirros alla) ja kierrellä siellä niin, että he kävelevät jokaisesta ovesta täsmälleen kerran. Voivatko he löytää tällaisen reitin? Entä silloin, jos he haluavat aloittaa ja lopettaa kierroksensa tähdellä merkittyyn kohtaan?



5. Dominolaatassa on kaksi vierekkäistä neliötä, joissa molemmissa on 0–6 pistettä. Osoita, että kaikki erilaiset dominolaatat voidaan asettaa renkaaksi niin, että vierekkäisissä laatanpäissä on sama numero. Onko tämä mahdollista, jos pisteitä on 1–6?